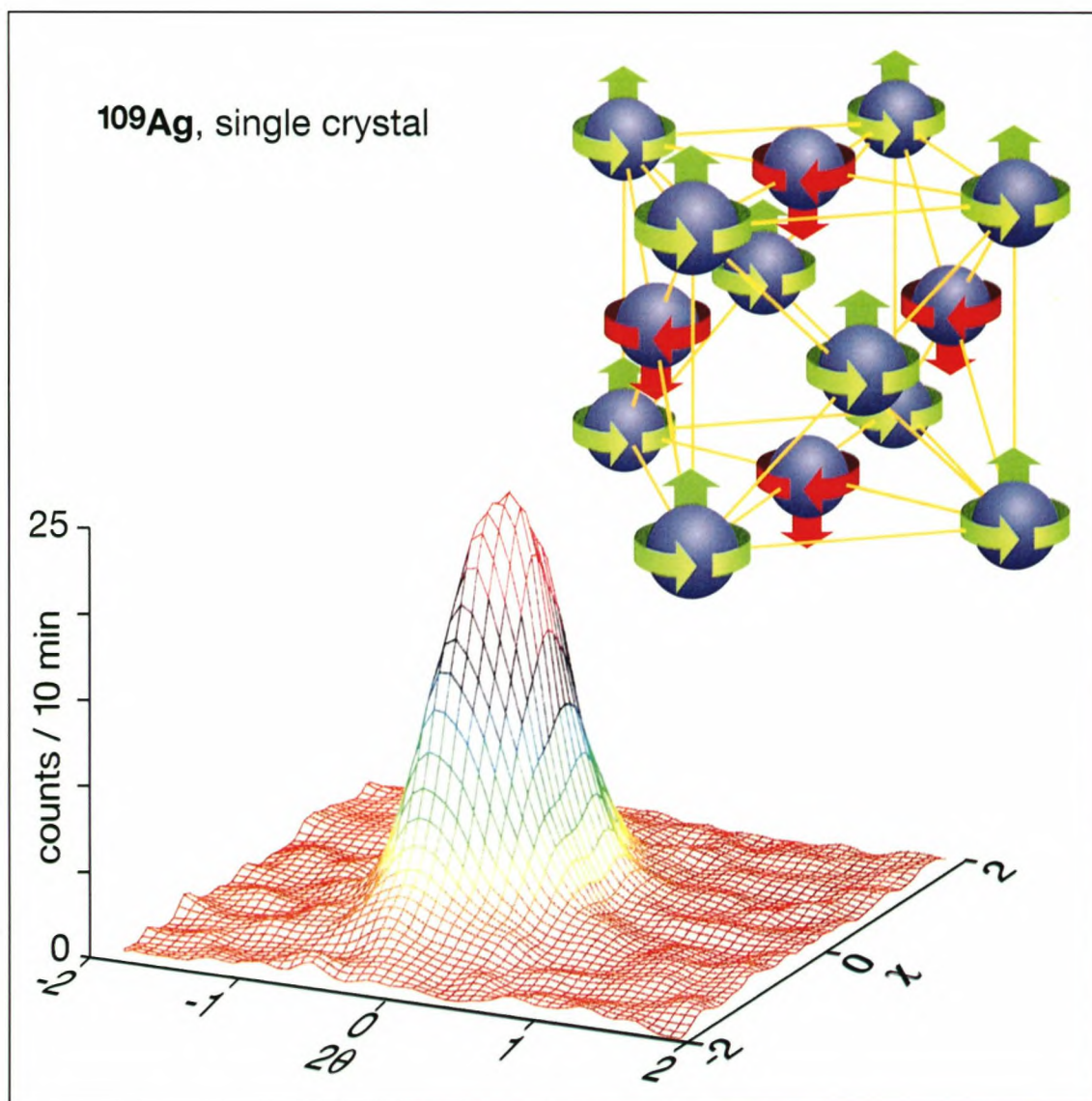




- VERDENS TREDIEKOLDESTE EKSPERIMENT • DET NÆSTKOLDESTE SØLV •
- DFS 25 ÅR • NKT PRISEN 1997 • HVEM MÅLTE TYNGDEN? • KLASSISKE PROBLEMER •

LØSSALGSPRIS: 35 KR

KVANT

Fysisk Tidsskrift

c/o Ørsted Laboratoriet
Niels Bohr Institutet
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø

Telefax : 35 32 04 60
E-mail : kvant@nbi.dk
Giro : 5 84 31 46

Udgives af

Dansk
Fysisk
Selskab



Selskabet for
Naturlærens
Udbredelse



Redaktion

Mads Hammerich (ansv.)
Frederiksberg Gymnasium
Rasmus Kromann (annoncer)
Torsten Freltoft
NKT Research Centre
Jørgen Friis Bak
Naturvidenskabeligt fakultet, ÅU
Jørn Christiansen
Mogens Esrom Larsen
Matematisk Institut, KU
Finn Berg Rasmussen
Ørsted Laboratoriet, KU
Ove Østergaard
Silkeborg Amtsgymnasium

KVANT udkommer 4 gange årligt og er medlemsblad for de udgivende selskaber.
Abonnementspris: 135 kr/år (i Danmark).

Annoncepriser

1/1 side	3000 kr
1/2 side	1600 kr
1/4 side	1000 kr
Farvetillæg	1800 kr

Priserne er excl. moms og gælder for reproklart materiale. Henvendelser om annoncer til Rasmus Kromann, NKT Research Centre, telefon 43 48 35 00, telefax 43 63 00 99.

Oplag: 2000

Tryk: P.J.Schmidt, Vojens
ISSN 0905-8893

Indhold:

Verdens trediekoldeste eksperiment

Kim Lefmann og Finn Berg Rasmussen 1
Hvordan køler man 100 milliarder gange og hvordan opfører stoffet sig dernede? Forfatterne har søgt og fundet, orden blandt sølvkerner i picokelvin-området

Meddelelser fra DFS

Preben Alstrøm m.fl. 11
DFS 25 år, Essaykonkurrence, årsmøde i DFS, NKT-prisen i fysik 1997

Et mål for tyngden. – Fra Galilei til Huygens

Tom Bøgeskov 17
Der er almindelig antaget at Galilei fandt en værdi for tyngdeaccelerationen. Bøgeskov går i rette med denne antagelse og viser udviklingen fra den unge mekaniks proportionslære til den modne mekaniks dimensionsanalyse.

To ud af tre – de klassiske problemer

Mogens Esrom Larsen 25
Hvordan man tredeler en vinkel – med snyd. Og hvorfor man ikke kan gøre det med den autoriserede brug af passer og lineal.

Forsiden:

Koldt ordnet sølv. Man tager noget isotopisk rent sølv-109 og gror det til en enkrystal. Derefter køler man det til en 100 milliardenedel af stuetemperaturen. Hvorefter man tilsætter et beam af kolde neutroner. Neutronspredningstoppen på figuren ligger 0,2° fra den forventede position for neutronspredning på antiferromagnetisk sølv. Tegningen viser det flade-centrerede, kubiske, antiferromagnetiske sølvgitter. Læs artiklen side 1.

Bagsiden:

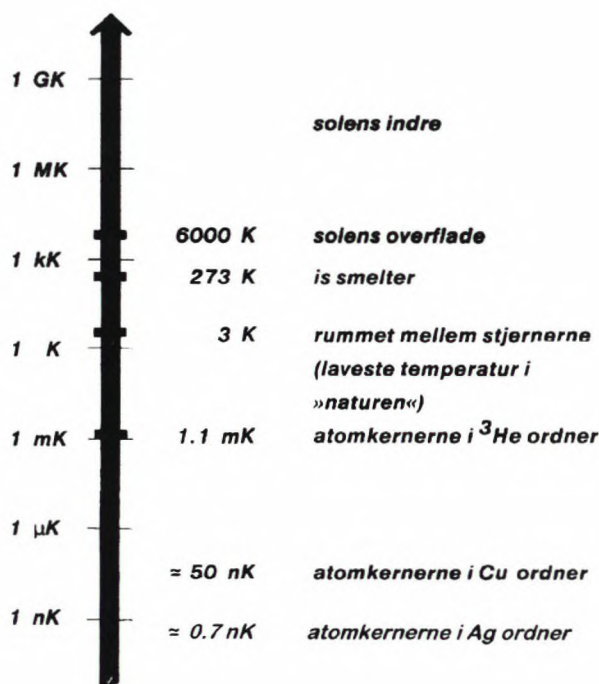
Den orden der hersker ved de allerlaveste temperaturer kan kun skabes ved at betale en told i form af større uorden et andet sted i universet. Her ved lavtemperatur laboratoriet på Hahn-Meitner instituttet i Berlin. Under Kim Lefmann, der står og fylder helium på opstillingen, ses indslutningen om det der et par dage efter vil være verdens koldeste sølv.

Artikler modtages!

KVANT modtager meget gerne artikler, forslag til artikler, forslag til temanumre, debatindlæg, og kritik. Indlæg modtages helst på en DOS-formateteret diskette og helst som ren DOS-tekstfil eller som L^AT_EX- kode. Redaktøren vil gerne høre fra kommende forfattere og bistår gerne med uforpligtende råd. Vores beholdning af kommende artikler er nær bunden. Så hvis du mener at det du laver er værd at meddele andre, er du velkommen til at kontakte mig på adressen: Mads Hammerich, Gersonsvej 40, 2900 Hellerup, Tlf: 39 61 27 30. Abonnement på KVANT koster 135 kr for en årgang. Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab og Selskabet til Naturlærens Udbredelse modtager bladet som medlemsblad. Bemærk at studerende kan blive medlemmer hos DFS for 75 kr årligt. Abonnement tegnes hos Lene Körner, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 Kbh Ø.

Verdens trediekoldeste eksperiment – kernemagnetisk orden i sølv.

Kim Lefmann, Afdeling for Faststoffysik, Forskningscenter Risø
Finn B. Rasmussen, Ørsted Laboratoriet, Niels Bohr Institutet



Figur 1. Den absolutte temperaturskala afbildet logaritmisk.

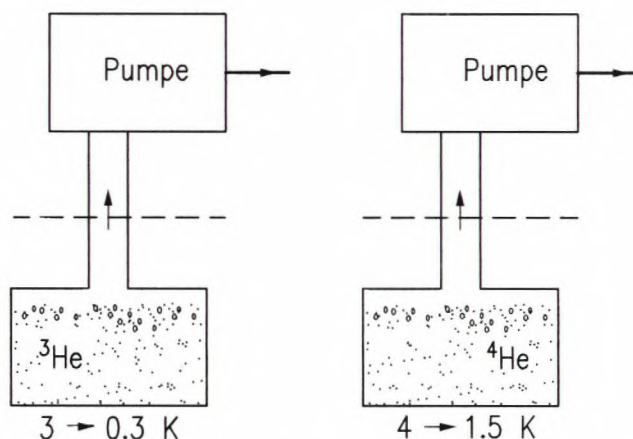
Temperaturskalaen

I dagligdagen føler vi en gevaldig forskel på en varm sommerdag og en kold vintermorgen. Målt på den absolutte temperaturskala (Kelvinskalaen) holder forskellen i temperatur sig dog under 20%, så set i det helt store perspektiv (figur 1) lever vi i et ret snævert temperaturinterval. I verdensrummet er temperaturvariationerne meget større, rækkende fra millioner af grader i stjernernes indre til det tomme rum mellem stjernerne, hvor den termiske baggrundsstråling svarer til en temperatur på 2.7 K – altså mindre end 3 grader over det absolutte nulpunkt.

Lavtemperaturfysikken er den diciplin, der beskæftiger sig med de laveste temperaturer, jo lavere desto bedre. Praktisk taget hver gang, det er lykkedes at drive temperaturen endnu længere ned, har man gjort nye, overraskende opdagelser. I 1996 er Nobelprisen i fysik blevet tildelt de tre, der i 1972 uventet opdagede superfluiditet i ^3He , fundet ved 2,5 mK. Grænsen for de lavest opnåelige temperaturer ligger nutildags 10 millioner gange lavere, under 1 nK. Det er det temperaturområde, denne artikel handler om.

Hvordan opnår man de laveste temperaturer?

Det eneste stof, der forbliver flydende ned til de laveste temperaturer, er helium. Den almindelige isotop, ^4He , koger ved atmosfæretryk ved en temperatur på 4,2 K. På grund af den latente varme forbundet med fordampningen bliver flydende ^4He i praksis ofte brugt som kølemiddel. Hvis trykket over flydende ^4He sænkes, f. eks. med en pumpe, vil den forøgede fordampning sænke temperaturen af væsken, se figur 2. Omkring ca. 1 K vil damptrykket af ^4He imidlertid være så lavt, at der ikke længere er nogen køleeffekt. Med den lette, men sjældne helium-isotop, ^3He , går det tilsvarende. Kogepunktet ved atmosfæretryk er 3,2 K, og ved pumpning kan man i praksis køle ned til 0,3 K. Denne metode udnyttes også til køleformål – men der er stadig meget langt endnu til de lave temperaturer, vi søger.



Figur 2. Kogning ved lavt tryk af flydende ^3He eller flydende ^4He kan frembringe temperaturer ned til henholdsvis 0,3 K og 1,5 K. Komponenter under den punkterede linie befinder sig i et vakuumkammer neddykket i flydende ^4He (4,2 K).

Et meget vigtigt skridt mod lavere temperaturer kan tages ved at blande ^3He og ^4He . Ved de laveste temperaturer er væskerne kun delvist blandbare (6% ^3He i ^4He og 0% ^4He i ^3He). Hvis man køler en flydende 50:50 blanding af de to, adskilles den i to faser, og den lette fase med koncentreret ^3He vil lægge sig øverst. En proces, hvor ^3He opløses i ^4He , er endoterm, og kan køle He-blandingen. For at opretholde en køleeffekt kan man fjerne ^3He selektivt fra den fortyndede (nederste) fase ved destillation. Under 1 K er damptrykket af ^3He er nemlig langt større end af ^4He , som nævnt tidligere (figur 2). I praksis vil man pumpe på en beholder, der er forbundet til



Dedicated XPS Quality-Analysis System New ESCA-Q System



- ◇ 200mm stainless steel analysis chamber
- ◇ 3 sample magnetic transfer mechanism
- ◇ Isolated fast entry airlock
- ◇ Bakeout facility (120 C°)
- ◇ Integrated electronics within system bench
- ◇ Analyser, X-ray and ion gun on sealed ports
- ◇ 250l/s turbo pump with rotary backing
- ◇ Base Pressure (5×10^{-9} mB)

A complete XPS analysis system designed for surface quality control applications, analysing contamination and elemental constituents on surfaces of metals, semiconductors, catalysts and polymers. This integrated system also provides an ideal student training facility.

For further information, please contact Kennet Joelsson, Fisons Instruments Nordic AB, tel. +46-(0)8-6292400, fax +46-(0)8-627 52 20.
E-mail: kennet.joelsson@fisons-instruments.se

den fortyndede fase, som vist på figur 3.

For at få den skitserede blandingskøling til at forløbe kontinuerligt, komprimerer man den uddestillerede ^3He gas ved stuetemperatur og sender den tilbage til den koncentrerede (øverste) fase, efter først at have fortættet gassen ved hjælp af pumpet ^4He ved ca. 1,5 K. Hele denne opstilling, som er skitseret på figur 3, kaldes en *blandingskøler*. Disse kølemaskiner kan købes kommercielt og kan – afhængig af pris, varmebelastning m.v. – nå ned til temperaturer i intervallet 2-35 mK. Blandingskøleren er et meget vigtigt instrument i dagens lavtemperaturfysik, og den udgør da også en vigtig del af den opstilling, vi her vil beskrive.

Ved millikelvin-temperaturer er varmekapaciteten af de fleste stoffer forsvindende. Der kræves derfor ikke meget kølekraft for at få stoffet kølet yderligere. Denne kølekraft kan hentes fra atomkernerne i stoffet! Kølemetoden kaldes for *adiabatisk afmagnetisering*, og vi vil nedenfor prøve at illustrere principperne i den.

Man placerer en prøve, oftest kobber, i et kraftigt magnetfelt, typisk 5-10 T. Atomkernernes spin I (se box: Spin) giver anledning til et magnetisk dipolmoment, μ , som igen bevirker en energiforskel mellem de enkelte kerner spintilstande i feltet. Dette er illustreret i figur 4 for det simpleste tilfælde med kun 2 tilstande.

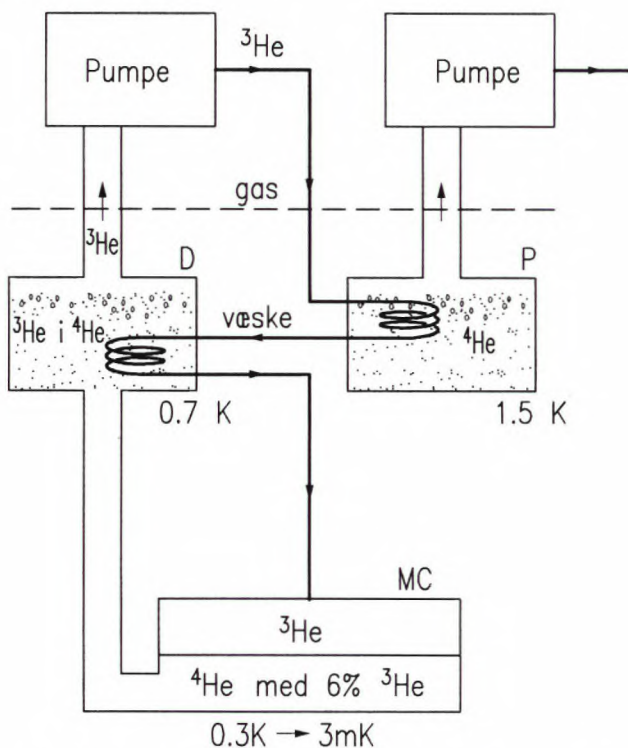
Hvis temperaturen er tilstrækkelig lav, vil det magnetiske felt være i stand til at polarisere kernerne betragteligt. Det koster energi at vende et spin væk fra magnetfeltets retning. Deraf følger at det polariserede materiale har en såkaldt magnetisk varmekapacitet. Denne magnetiske varmekapacitet vil være mange gange større end varmekapaciteten for resten af systemet (ledningselektronerne og krystalgitteret). Kaldes antallet af kerner med spin op (dvs. magnetisk moment parallelt med feltet) for n_{op} og antallet med spin ned for n_{ned} , vil forholdet mellem dem være givet ved Boltzmann faktoren

$$\frac{n_{ned}}{n_{op}} = \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right), \quad (1)$$

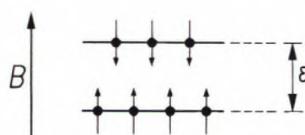
hvor $\epsilon = 2\mu B$ er energiforskellen mellem de to kernetilstande i magnetfeltet B , k_B er Boltzmanns konstant og T er temperaturen. I tilfældet i figur 4, hvor $n_{ned}/n_{op} = \frac{3}{4}$, kan T beregnes, når B samt konstanterne er kendt.

Polariseringen af atomkernerne tager ved temperaturer på omkring 10 mK lang tid – i et metal typisk 1-2 dage, i isolatorer op til adskillige år. Denne lange *relaksationstid* skyldes, at den termiske kontakt mellem kernerne og det omgivende stof er meget svag. Dette lyder umiddelbart som en ulempe for eksperimentalfysikeren, men det viser sig at være en meget vigtig egenskab. Hvis man nemlig

ændrer på magnetfeltet på en tidsskala, der er hurtigere end kernerens relaksationstid, kan man regne den samlede kernepolarisering for konstant. Derved vil kernerens entropi, der i et magnetfelt kun afhænger af polariseringen (se box: Entropi), også være konstant, og processen er *adiabatisk*. En anden konsekvens af den langsomme relaksation er, at kernerens temperatur sagtens kan være forskellig fra temperaturen af det elektroniske system – i hvert fald i nogen tid.



Figur 3. Komponenterne fra foregående figur er udbygget til en blandskøler. ^3He gas fortættes ved 1,5 K og opløses i ^4He i blandskammeret MC. I destillatoren D separeres ^3He atter fra ^4He . Alt under den punkterede linie er inde i et vakuumkammer, hvis væg har temperaturen 4,2 K.



Figur 4. Energiniveauer for atomkerner med spin $I = 1/2$ (f. eks. ^{109}Ag) i et magnetisk felt B .

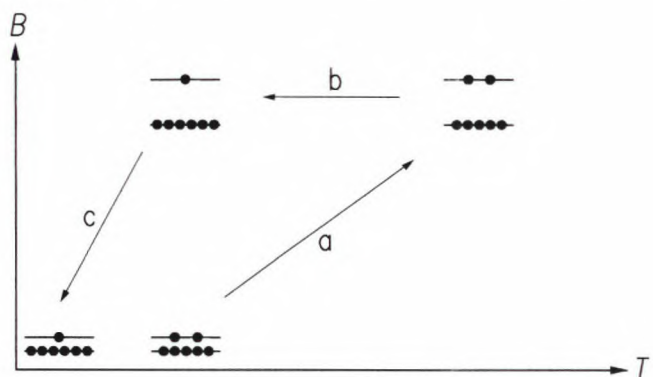
Lad os nu se på, hvad der sker med kernerens temperatur ved en adiabatisk afmagnetisering. Da $n_{\text{ned}}/n_{\text{op}}$ er konstant, må højresiden af (1) også være konstant. μ og k_B er konstante, og derfor må vi have at $B/T = \text{konstant}$, så vi får:

$$T_{\text{slut}} = \frac{B_{\text{slut}}}{B_{\text{start}}} T_{\text{start}}. \quad (2)$$

Ved at reducere magnetfeltet kan man altså sænke kernerens temperatur! Fra (2) ser det endda ud som om, at temperaturen kan bringes helt ned til det absolutte nulpunkt ved at lade $B_{\text{slut}} = 0$. Dette er nu ikke tilfældet, for i det simple udtryk ovenfor har man udeladt det lokale magnetfelt

på den enkelte kernes plads, B_{lokal} , der skyldes kernerens indbyrdes vekselvirkning. Bliver dette inkluderet, skal B erstattes med (approximativt) $\sqrt{B^2 + B_{\text{lokal}}^2}$. Men da det lokale felt ofte er meget lille, af størrelsesordenen 1 mT, kan processen bruges til at køle til meget lave temperaturer.

Princippet bag adiabatisk afmagnetisering virker umiddelbart anti-intuitivt og kræver nok en kvalitativ forklaring. Prøv at betragte ændringerne i ϵ og i kernerens fordeling på figur 5. Lad processen starte i et svagt magnetfelt og ved en lav forkølingstemperatur (typisk nær blandskammerets temperatur). Under delproces a forøges magnetfeltet til B_{start} ; herved bliver ϵ større, og temperaturen stiger. Under b relaxerer kernesystemet tilbage til forkøleanlæggets temperatur T_{start} ; spinsystemet afgiver varme, indtil det opnår den højere polarisering givet ved det høje felt og T_{start} . Til slut tager en adiabatisk afmagnetisering os tilbage til det oprindelige lave magnetfelt B_{slut} , men den højere polarisering betyder, at temperaturen T_{slut} er lavere end T_{start} , jvnfr. lign. 2. Processen a - b - c har fjernet varme (og entropi) fra kernesystemet, som derved er blevet afkølet. Systemet kan optage varme udefra, mens temperaturen stiger til T_{start} , ved konstant magnetfelt.



Figur 5. Køling ved adiabatisk afmagnetisering. a: magnetfeltet forøges til B_{start} . b: kernesystemet køles tilbage (relaxerer) til T_{start} ; det bliver herved stærkere polariseret. c: magnetfeltet sænkes til B_{slut} ved uændret polarisation. Temperaturen falder til T_{slut} , jvnfr. ligning (2)

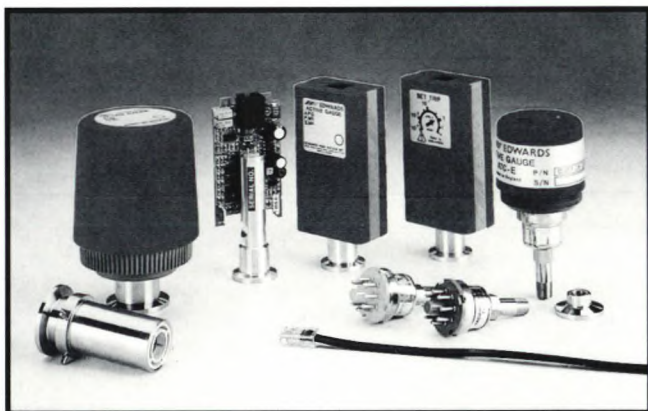
Kernemagnetisme og neutronspreddning

I et magnetisk materiale, f.eks. en køleskabsmagnet, virker der stærke kræfter mellem de magnetiske momenter fra nærtliggende atomer. Ligeledes virker der magnetiske kræfter mellem momentet fra atomkerner, omend disse kræfter kan være milliarder af gange svagere.

I mange tilfælde kan de magnetiske dipolkræfter negligeres til fordel for de stærkere udvekslingskræfter (*exchange*), som er af elektrisk natur og skyldes indflydelsen fra de omgivende elektroner. Den magnetiske energi som følge af vekselvirkningen mellem to spin kan så approximeres ved Heisenberg modellen:

$$H_{i,j} = J \vec{I}_i \cdot \vec{I}_j. \quad (3)$$

Hvis J er negativ, svarer det til, at spinnene foretrækker



Active gauges er et nyt koncept til vakuummåling. Målehovedet indeholder hele elektronikken til måleudstyret og kræver derfor kun en standard DC strømforsyning. Udgangssignalet er 0 - 10V DC. Udlæsningen kan foregå på et almindeligt måleinstrument, PLC eller på en computer. Derved er der bedre mulighed for dokumentation ved f.eks. produktionskontrol. Fordelen ved denne konstruktion er bl.a., at man ikke behøver at have målehoved og måleudstyr i nærheden af hinanden. Kabler kan leveres i længder på op til 100 meter.

Pris pr. målehoved fra kr. **2.540,-** ex. moms

EDWARDS

Rotationsvakuumpumpe type RV er en ny oliepumpe, som både er en et- og to-trins pumpe, da der er mulighed for med en drejeknap at øge luftgennemstrømningen. Denne mulighed er der ingen andre vakuum-pumper på markedet der har. Pumpen leveres i 4 størrelser 3,7 - 5,8 - 9,7 - 14,2 m³/h.

Edwards RV pumper er velegnet som kemipumpe til f.eks. geltørring, centrifugering og frysetørring. Er også velegnet til rene systemer, hvor der kræves lavt sluttryk. I laboratoriet vil man også påskønne det meget lave støjniveau på kun 48 dBA.



Buch & Holm A/S

Marielundvej 36 - 2730 Herlev ☎ 42 91 75 11 Fax 44 92 31 00

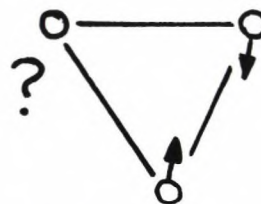
at pege i samme retning. Herved kan man få et stort samlet moment, som for en elektronisk magnet kan udnyttes makroskopisk. Jern er et sådant materiale, og denne magnetismetype kaldes derfor ferromagnetisme. Jern er ferromagnetisk under en kritisk temperatur på $T_C = 1043$ K, men over denne værdi vil den termiske uorden ødelægge den magnetiske orden. Hvis J derimod er positiv, foretrækker spinnene en anti-parallel ordning, og man taler om antiferromagnetisme. Dette er illustreret i figur 6. Den kritiske temperatur for antiferromagneter kaldes T_N .



Figur 6. Ferromagnetisk og antiferromagnetisk orden i 1 dimension.

Der er mange spændende, uløste problemer indenfor antiferromagnetisme, men vi vil nøjes med at præsentere et enkelt her. Figur 7 forestiller tre spin, som alle vekselvirker med hinanden. Lader man det ene spin pege "op" og det andet "ned", kan det sidste ikke samtidigt "tilfredsstille" relationerne til begge sine naboer. Denne situation betegnes meget rammende med ordet *frustration*. Var der tale om klassiske spin, kunne

de indgå et kompromis ved at dreje spinnene 120° i forhold til hinanden, men for kvantemekaniske spin (for ^{109}Ag er $I = 1/2$) er dette ikke så ligetil. Endnu ved man ikke en gang, om et antiferromagnetisk to-dimensionalt trekantgitter vil have en ordnet fase, eller om der vil være uorden ned til de laveste temperaturer.



Figur 7. Magnetisk frustration illustreret ved antiferromagnetiske spin i en trekant. Det er umuligt at få alle tre spin til at være indbyrdes antiparallelle samtidigt.

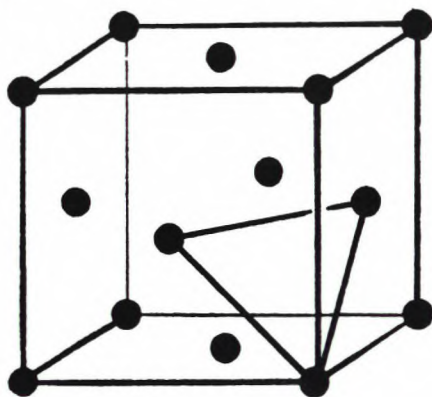
Krystalstrukturen af Ag er flade-centreret kubisk (fcc), som skitseret på figur 8. En antiferromagnetisk nærmeste-nabo kobling i denne geometri vil føre til frustration i tre dimensioner. Dette er netop tilfældet for ^{109}Ag , og det var en af grundene til, at vi valgte at undersøge kernemagnetisme i netop dette stof.

Det overordnede formål med vores projekt var altså at

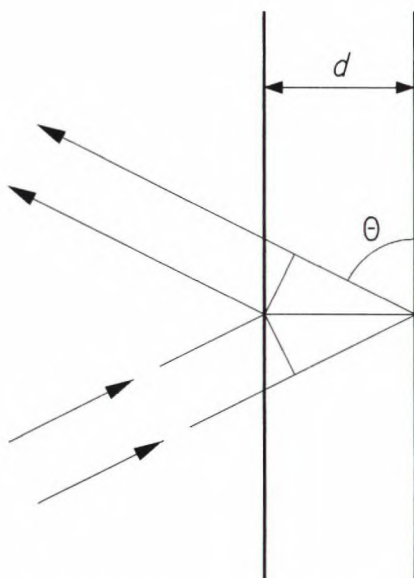
finde ud af:

- Om kernespinne i ^{109}Ag har en ordnet tilstand ved de laveste temperaturer.
- Hvilken struktur der i så fald er tale om.

Fra tidligere målinger i Helsinki var man ret sikker på, at der var en ordnet fase, omend dette ikke kunne vides med sikkerhed.



Figur 8. Atomernes position i en flade-centreret kubisk krystal. Trekanten forbinder nærmeste naboer og ses også i den foregående figur.



Figur 9. Bragg's betingelse for konstruktiv interferens ved refleksion fra to planer.

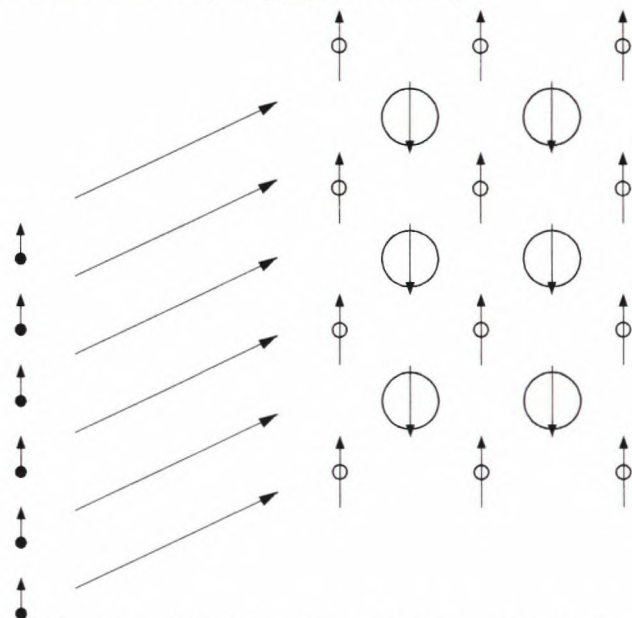
Det endelige svar på de to spørgsmål ovenfor kunne kun findes ved hjælp af *neutronspredning*. Her udnytter man, at neutroner (ligesom andre partikler) har bølgenatur. En neutron med en veldefineret hastighed kan altså tilskrives en bestemt bølgelængde, λ , som for spredningseksperimenter typisk er en brøkdel af en nanometer. Når neutroner sendes ind imod en krystal, kan de spredes i bestemte retninger på samme måde som for röntgendiffraktion. Dette skyldes interferens imellem

spredning fra atomerne i forskellige gitterplaner, og spredningsvinklerne er givet ved Bragg's lov:

$$2d \sin(\theta) = n\lambda, \quad (4)$$

hvor d er afstanden mellem gitterplanerne, og n er et naturligt tal (se figur 9). I dette eksperiment har vi koncentreret os om de mindste observerede spredningsvinkler, d.v.s. $n = 1$.

Også neutroner har et spin, $s = 1/2$, og sandsynligheden for spredning mellem en neutron og en atomkerne afhænger generelt af de to spins indbyrdes orientering. For ^{109}Ag spredes neutroner kraftigst fra kerner med antiparallelt spin (her er *spredningstværsnittet* størst). Derfor er neutronerne følsomme overfor kernemagnetisk orden, som vil give anledning til nogle længere effektive gitterafstande og derved til spredning ved lavere vinkler. Dette er illustreret på figur 10 for en såkaldt type-I, eller (001), struktur svarende til, at kernespinne peger skiftevis op og ned i hvert andet gitterplan langs en kubisk hovedakse af krystallen. Denne struktur var før forsøget forudsagt ud fra teoretiske udregninger på klassiske spin.



Figur 10. Antiferromagnetisk (001) struktur af kernespin set fra en neutrons synsvinkel. De åbne cirkler illustrerer forskellen i spredningstværsnit for de to spinretninger.

Den ordnede kernemagnetiske fase af ^{109}Ag

For at undersøge den ordnede fase af kernespinne i ^{109}Ag måtte vi altså både have en kryostat, der kunne køle til de allerlaveste temperaturer samt have adgang til en konstant tilførsel af neutroner med veldefineret bølgelængde. Neutronerne fandt vi på Hahn-Meitner Institut i Berlin, og kryostaten blev transporteret fra Risø, hvor et lignende forsøg med kernemagnetisk orden i Cu var blevet afsluttet kort forinden. (Sølvprojektet kunne teknisk set også have været afviklet på Risø, men økonomien her kunne ikke længere bære et kostbart kernemagnetisk eksperiment.)

I figur 11 er skitseret opbygningen af den kryostat, vi har anvendt i Berlin siden 1992. I den yderste tynde

FRA VORT STORE PROGRAM

VARIAN

Turbopumper
Ionpumper
Oliediffusionspumper
Læksøgere
Vacuum måleudstyr
UHV & HV fittings

DCA Instruments

Fremstilling af UHV anlæg til:
Sputterprocesser
MBE
Tyndfilm deponering
Overfladeanalyse
samt kundespecificeret UHV kamre

Lake Shore Cryotronics

Lavtemperatur kontrollere
& sensorer
Elektromagneter & strømforsyninger
Gaussmetre & Hall elementer
VSM (vibrating sample magnetometer)
AC/DC magnetometer - susceptometer

Oxford Applied Research

Reaktive atomkilder
Mini E-beams
Quartz micro vægte
Ioniserede doping
K-celler
Substratholdere i
UHV udførelse
Rheed Guns
Magnetronkilder
Ion cleaning Guns
Fokuserende
elektronkilder
Scanning Ionkilder

Leda - Mass

Quadrupoler / RGA
Windowsbaseret software
Specielt design til
sputterprocesser
ion implantering
tyndfilm
optisk coating
acceleratorer
overfladeanalyse m.m.

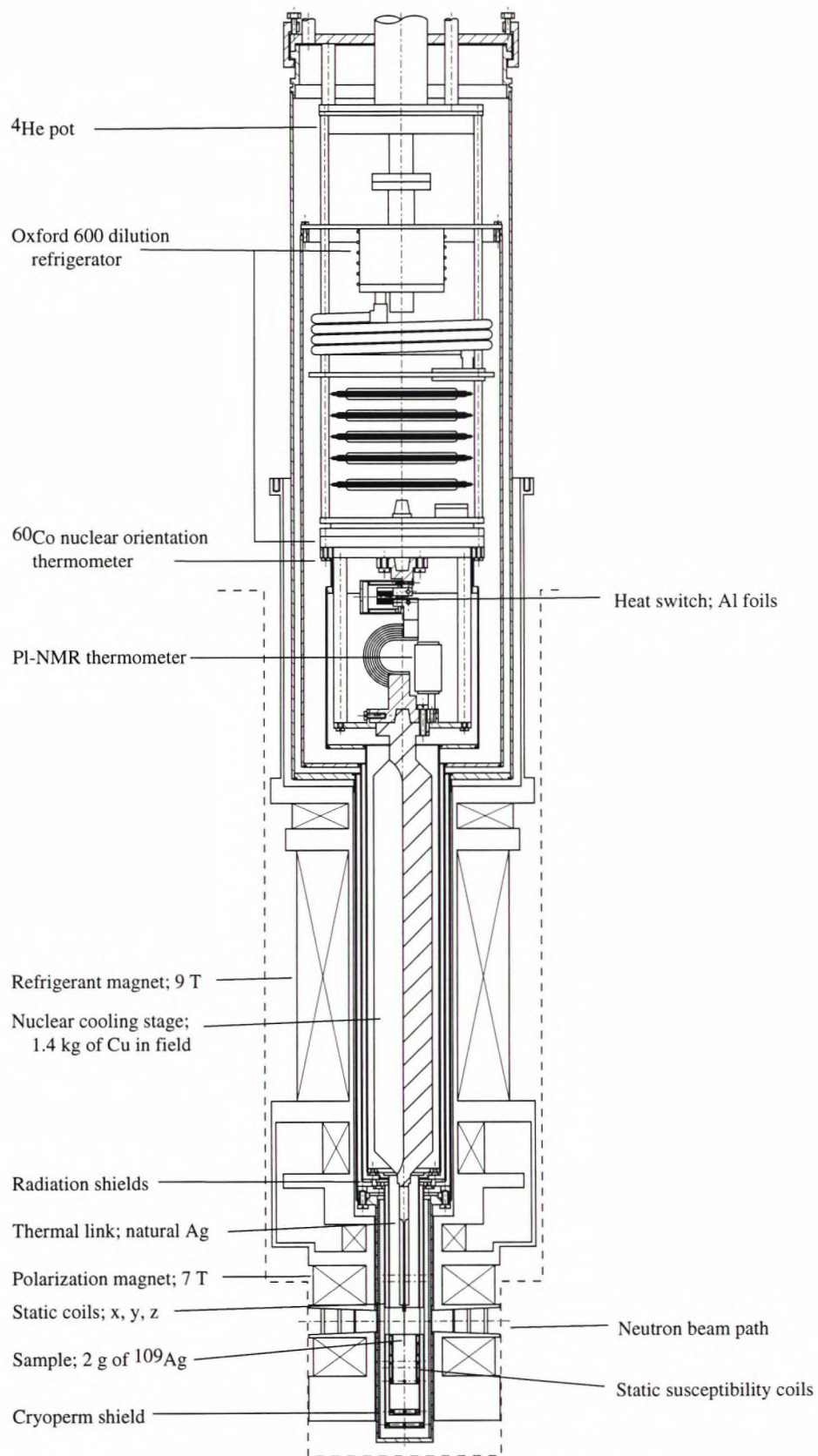
APD cryogenics

Close cycle kryostater ned til 6,5 °K
Open cycle kryostater ned til 2 °K
Cryotiger fra 80 °K til 120 °K
Kryopumper

AAGE CHRISTENSEN A/S

Skelmosevej 10, DK-2500 Valby Tlf. 36 44 24 44 Fax 36 44 20 24





En skitse af den kryostat, der er blevet anvendt til studiet af kernemagnetisk orden i sølv i Berlin siden 1992.

skal er der et isolerende vakuum, mens den næstyderste skal er fyldt med flydende ^4He ved 4,2 K samt en række superledende magneter. Det inderste store volumen er ligeledes i vakuum og indeholder selve eksperimentet. Øverst ses blandingskøleren med det kolde blandingskammer underst. Derunder hænger første kernetrin: En stor (1,4 kg) kobbercylinder, termisk forbundet til blandingskøleren gennem en varmeafbryder af aluminium, der kan gøres superledende eller normaltledende ved hjælp af en magnet. Under første kernetrin hænger andet trin, som udgøres af selve prøven: En eenkrystal af isotoprent ^{109}Ag . Når der bliver "åbnet" for neutronerne, vil de fleste af dem gennemtrænge kryostatens vægge, og nogle af dem vil spredes fra prøven.

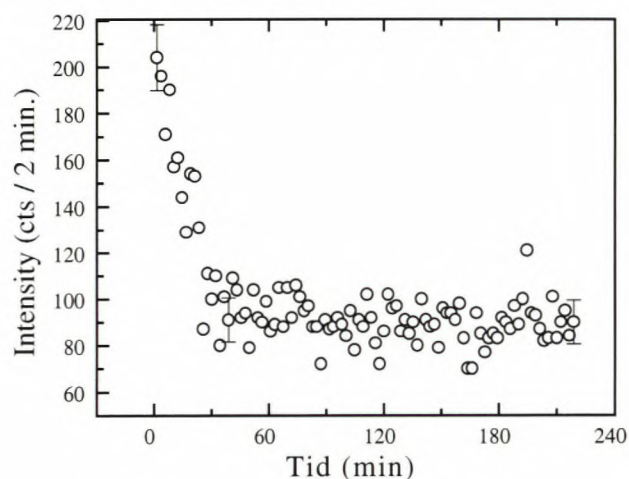
I praksis foretages et eksperiment på følgende måde:

- Kryostaten og neutrontektoren indstilles i vinkler, svarende til den struktur, man vil undersøge. Mens prøven er kold kan man nemlig ikke ændre disse vinkler (små rystelser ville varme prøven op).
- Første kernetrin magnetiseres til 9 T.
- Varmekontakten slutes ved at undertrykke superledningen i Al med et magnetfelt (superledende materialer leder varme ekstremt dårligt).
- Blandingskøleren køler første kernetrin til en temperatur på 8-10 mK. Dette tager ca. 36 timer.
- Varmekontakten afbrydes ved at fjerne magnetfeltet på Al-afbryderen.
- Første kernetrin afmagnetiseres til ca. 50 mT, hvilket giver en temperatur på ca. 60 μK . Samtidigt magnetiseres andet trin til 7 T.
- Kernespinne i prøven polariseres kraftigt (99%) ved relaxsation til den lave temperatur, i 7 T. Dette tager ca. 30 timer.
- Andet trin (prøven) afmagnetiseres til nul ($\pm 5 \mu\text{T}$). Herved falder temperaturen i prøven med en faktor 10^5 .
- Der åbnes for neutronerne, og signalet fra den ordnede fase kan (forhåbentlig) ses ved de indstillede vinkler.

Et enkelt eksperiment tager altså mindst 3 døgn – forudsat at neutronkilden kører og kryostaten virker!

Efter halvandet års byggearbejde havde vi fået kryostaten samlet og blandingskøleren til at virke i efteråret 1993. Men signalet fra den ordnede fase udeblev. Eftersøgningen blev udvidet til andre (mere eller mindre begrundede) spredningsvinkler, men stadig uden resultat. Igennem det næste års forsøg faldt deltagernes spænding og nervøsitæt forud for hvert eksperiment, og vi var så småt begyndt at indstille os på ikke at få nogen klare resultater; måske var der ingen langtrækkende orden pga. frustration i spinsystemet. I efterårsferien i 1994 opdagede vi

imidlertid en svag stigning i neutrontællingerne lige efter den sidste afmagnetisering. Resultaterne fra dette forsøg er vist på figur 12.



Figur 12. Det første succesfulde eksperiment. Lige efter afmagnetiseringen er neutronintensiteten fordoblet i forhold til baggrunden.

Spin

Naturen har forsynet alle elementarpartikler med et impulsmoment (bevægelsesmængdemoment, rotationsmængde) med konstant størrelse. Også atomkernernes impulsmoment har en foretrukken størrelse, som kun kan ændres ved tilførsel af store mængder energi. Som en konsekvens af kvantemekanikkens ubestemthedsrelationer kan man kun kende en af komponenterne af impulsmomentvektoren af gangen – lad os vælge z -retningen. Denne komponent vil tilmed være kvantiseret – den kan kun antage visse værdier: $L^z = 0, \pm\hbar/2, \pm\hbar, \pm3\hbar/2, \dots, \pm I\hbar$. Den maksimale værdi (i enheder af $\hbar = h/2\pi$), I , kaldes for kernens *spin*, ligesom spinkomponenten I^z defineres ved $L^z = \hbar I^z$.

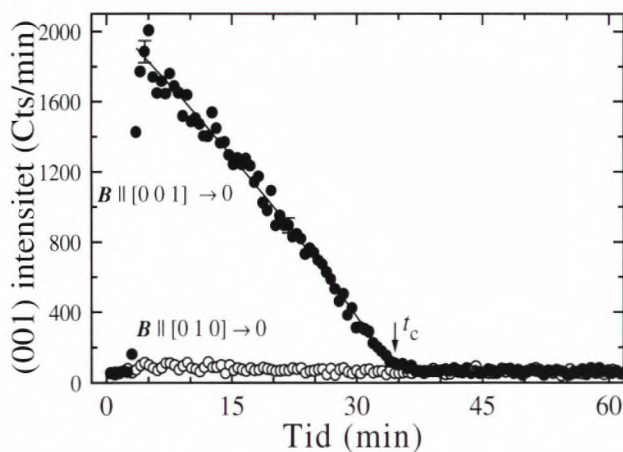
En fundamental sætning i kvantemekanikken siger, at enhver vektoregenskab af en partikel må have samme retning som partiklens spin. Dette gælder også for kernens magnetiske dipolmoment, hvorfor dets z -komponent kan skrives som $\mu^z = gI^z$. Den magnetiske energi af en kerne i et påtrykt felt langs z -retningen kan derfor skrives $E_{\text{magn}} = gBI^z$.

Jo større en partikels spin er, desto bedre kan partiklens impulsmoment beskrives ved en klassisk vektor. Den mest "kvantiske" opførsel fås altså for $I = 1/2$ (idet $I = 0$ er uinteressant).

Selvom dette signal var meget svagere end forventet, var begejstringen stor over endelig at se noget overhovedet. Bare dette svage signal var nemlig et entydigt bevis for at kernespinne i Ag ordner i en simpel antiferromagnetisk struktur: signalet afhang øjensynligt af temperaturen, og

den observerede spredningsvinkel svarede til en gitterafstand, der var længere end muligt i en uordnet Ag krystal.

Senere fandt vi ud af, at eksperimentet var meget følsomt overfor retningen af magnetfeltet i den afsluttende afmagnetisering. Hvis magnetfeltet pegede *vinkelret* på de gitterplaner, som neutronerne var indstillet til, var signalet tydeligt. Hvis feltet derimod lå *parallelt med* planerne, så man ingenting. Klare resultater er vist på figur 13, hvor man i det ene forsøg ser et højt tælleantal efter den sidste afmagnetisering – fulgt af en lineær aftagen, der skyldes den uundgåelige opvarmning fra omgivelserne. I det andet forsøg ser man overhovedet ingenting, selvom magnetfeltets retning er det eneste, der adskiller de to forsøg. Denne retningsafhængighed var overraskende for os, idet afmagnetiseringen faktisk foregik hele vejen til nul felt, hvor der jo ikke længere er nogen foretrukket retning. Men det kernemagnetiske system har åbenbart en slags hukommelse, ligesom man kender det fra magnetbånd. Effekten kan forstås ved, at den magnetiske struktur opbygges under den sidste del af afmagnetiseringen, hvor magnetfeltet udpeger en bestemt retning, men vi har endnu ikke forstået denne effekt til bunds.

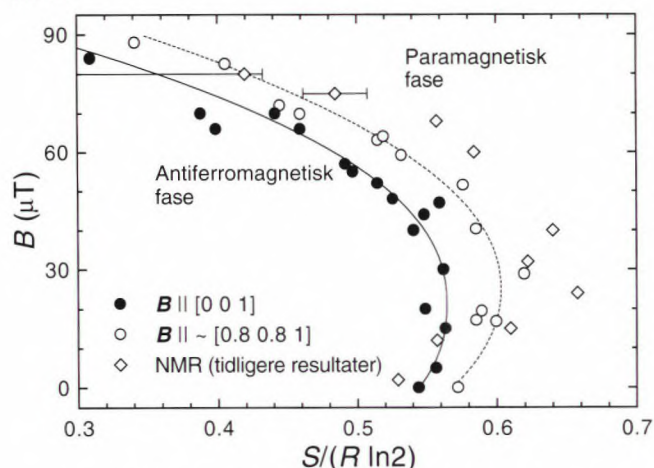


Figur 13. To rigtigt vellykkede eksperimenter. Den endelige afmagnetisering sker ved tiden 3 min, og kernespinsystemet går ind i den ordnede fase. For begge kurver kommer neutronintensiteten ved refleksion fra det samme sæt af planer i krystallen, og magnetfeltet er nul. For de sorte punkter var magnetfeltets retning vinkelret på disse planer under afmagnetiseringen, mens en afmagnetiseringsretning parallel med planerne gav cirklerne.

Ved at udføre forsøget i forskellige magnetfelter fandt vi ud af, at den type-I ordnede magnetiske fase forekom ved felter op til et kritisk felt, $B_c = 100 \mu\text{T}$. Det samlede magnetiske fasediagram er vist på figur 14. I dette diagram er x -aksen ikke (som man ellers plejer) temperaturen, men derimod entropien. Dette skyldes, at temperaturen ikke kan måles direkte, men at man derimod kan udregne entropien ved at måle kernernes polarisering i et højt felt, lige når systemet har forladt den ordnede fase. Og da feltændringer er adiabatisk, kan man derved bestemme entropien ved den magnetiske faseovergang. Ved høje magnetfelter ligger fasegrænsen ved lave entropier, svarende til at magnetfeltet hjælper den termiske uorden med at ødelægge den antiferromagnetiske orden. Med faldende magnetfelt stiger overgangsentropien da

også. Ved helt lave magnetfelter ses imidlertid den modsatte effekt, overgangsentropien falder! Dette kan være en konsekvens af frustrationen i systemet, men kan også skyldes, at vi ikke har målt det lave magnetfelt præcist nok. Dette spørgsmål er endnu ikke helt afklaret.

På figur 14 ses endvidere resultatet af et tidligere forsøg fra Helsinki lavet på naturligt forekommende sølv (stort set lige dele ^{107}Ag og ^{109}Ag) uden brug af neutroner. Overensstemmelsen mellem de to datasæt er nogenlunde, og man kan ved at forskyde entropiskalaen en smule få de to fasediagrammer til at overlappe på nær for de laveste magnetfelter. I dette tidligere eksperiment bestemte man sammenhængen mellem entropi og temperatur ved brug af termodynamikkens anden hovedsætning (se box: Entropi): Man tilførte en varme Q og målte den inducerede ændring i entropi, ΔS . Temperaturen er da givet ved $T = Q/\Delta S$. Ved brug af den fundne temperaturskala – korregeret for et lidt højere gennemsnitligt kernemagnetisk moment i vores prøve – kunne vi bestemme overgangstemperaturen ved nul felt til $T_N = 700 \pm 80 \text{ pK}$, hvilket gør dette eksperiment til det tredje-koldeste nogensinde, kun overgået af det tidligere Ag eksperiment ($560 \pm 60 \text{ pK}$) – samt rekordforsøget på rhodium, som omtales i næste afsnit.



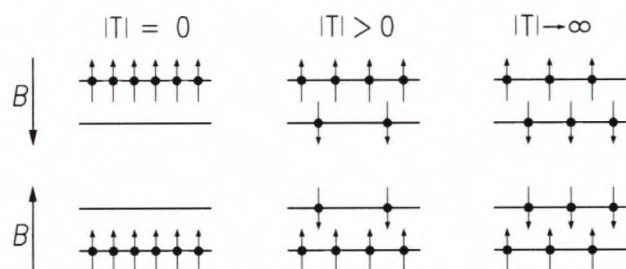
Figur 14. Magnetisk fasediagram af Ag ved temperaturer under 1 nanokelvin.

Kernemagnetisk orden ved negative temperaturer – og temperaturrekorden

I modsætning til de fleste termodynamiske systemer (f. eks. en gas af atomer) er energien af et spinsystem opadtil begrænset; når spinnene peger fuldt imod magnetfeltets retning og alle spinnene er parallelle (for en antiferromagnet), kan der ikke tilføres mere energi. Denne tilsyneladende ligegyldige observation har vigtige principielle konsekvenser, for den muliggør eksistensen af *negative temperaturer* i et kernespinsystem!

Først må vi beskrive, hvad man forstår ved negative temperaturer. Lad os gå tilbage til eksemplet med $I = 1/2$ kerner i et magnetfelt, hvilket er illustreret i en udvidet version på figur 15. Ved lave (positive) temperaturer er der meget få kerner i den øverste tilstand,

svarende til at i Boltzmann faktoren $\exp(-2\mu B/k_B T)$, ligning (1), har B/T en høj, positiv værdi. Ved meget høje temperaturer ($T \rightarrow \infty$) bliver befolkningen af de to niveauer næsten ens, svarende til $B/T \rightarrow 0$. Nu er det imidlertid muligt at "bytte om" på de to energiniveauer ved at vende magnetfeltet så hurtigt, at spinnene ikke kan nå at følge med. Nu er der så overvægt af spin i det øverste niveau, og det svarer til, at Boltzmannfaktoren er større end 1, altså at B/T er negativ. Og da B er defineret positiv, må T være negativ. De negative temperaturer er altså en matematisk inspireret definition til beskrivelse af tilstande, der indeholder mere energi end ved $T \rightarrow \infty$. De varmeste temperaturer er derfor de negative!



Figur 15. Sammenligning af positive (nederst) og negative temperaturer (øverste række).

Entropi.

Entropi står løst sagt for mængden af (termisk) uorden, og er et meget fundamentalt begreb i fysikken. Hvis et systems makroskopiske tilstand (f.eks. totale energi) kan fremkomme på W måder ved forskellige konfigurationer af systemets mikroskopiske variable (f.eks. spin), er entropien givet ved $S = k_B \ln(W)$. Kender man derfor polariseringen af kernerne spin i et magnetisk felt, kan man beregne antallet af konfigurationer svarende til, at man kender *antallet* af spin, der peger hhv. op og ned: $W = n_{op}!n_{ned}!/(n_{op} + n_{ned})!$. En måling af kernespinnes polarisering bestemmer derfor entropien af systemet.

Hvis et system tilføres varme øges dets entropi. Når varmen Q tilføres ved den konstante temperatur T , er entropitilvæksten givet ved $\Delta S = Q/T$, ifølge *termodynamikkens anden hovedsætning*.

Eksistensen af negative temperaturer har en række interessante termodynamiske konsekvenser, som det ville føre for vidt at komme ind på i detaljer. Som eksempel kan dog nævnes, at systemet vil forsøge at maksimere (i stedet for som normalt at minimere) sin fri energi. Derfor vil den magnetiske ordening foregå stik omvendt af "normalt": Antiferromagnetiske kræfter vil føre til fer-

romagnetisk orden – og omvendt. Dette blev vist ved et eksperiment på sølv i Helsinki, hvor ferromagnetisk orden blev set ved temperaturer "højere" end $T_C = -1.9$ nK. Det er på tale at eftervise dette resultat ved hjælp af neutroner i Berlin.

Den temperatur, der ligger tættest på det absolutte nulpunkt, er dog opnået på den "normale" positive side. Det skete i Helsinki ved et eksperiment med kernemagnetisme i det sølv-lignende metal rhodium (Rh), hvor temperaturen blev målt til 280 pK ved brug af den tidligere beskrevne anden-hovedsætning-metode. Derudover blev eksperimentet dog ingen succes, idet man ikke så tegn på en ordnet tilstand af kernespinne. Dette skyldes formentlig, at de indirekte magnetiske vekselvirkninger mellem næst-nærmeste naboer i Rh er langt mere betydelige end i Ag, og at heller ikke de direkte magnetiske dipolkræfter kan negligeres. Dette kan forstærke effekten af den geometriske frustration, således at den ordnede fase først indtræder ved endnu lavere temperaturer. For at undersøge dette har man samme sted opbygget en forbedret udgave af eksperimentet, hvilket blandt andet indebar konstruktionen af en ny og langt kraftigere kryostat – som dog opererer efter helt samme principper som den, vi har beskrevet ovenfor. Afprøvningen af dette nye eksperiment er i øjeblikket i fuld gang, og indenfor et år eller to vil temperaturrekorden forhåbentlig have taget endnu et skridt nedad i lavtemperaturfysikkens endeløse stræben imod det absolutte nulpunkt.



Finn Berg Rasmussen er lektor ved Niels Bohr Institutets Ørsted Laboratorium. Har bl.a. arbejdet med kernemagnetisme (termodynamik og NMR) i fast, flydende og superflydende He-3 (og nu også i Ag). Medlem af KVANTs redaktion.



Kim Lefmann tog ph. d. grad 1995 fra Københavns Universitet på grundlag af det her beskrevne arbejde. Arbejdede 1995-96 ved Helsinkis tekniske Universitet. Nu postdoc ved Forskningscenter Risø.

Dansk Fysisk Selskab 25 år

Dansk Fysisk Selskab har 25 års jubilæum i 1997. Jubilæer benyttes traditionelt til tilbageblik over den svundne tid, og mange af selskabets medlemmer vil uden tvivl kunne bidrage med stort og småt om de forgangne år. DFS' bestyrelse vil imidlertid hellere benytte den festlige anledning til at se fremad, og har derfor besluttet at udskrive en essay konkurrence med titlen:

Dansk Fysik de næste 25 år - udvikling eller afvikling?

Konkurrencen står åben for danske fysikere i bredeste forstand, dvs. fysikere ved universiteter, forskningsinstitutioner og erhvervsvirksomheder af enhver art i ind- og udland, fysiklærere, fysikstuderende og -pensionister. Manuskripter på dansk eller engelsk og omfattende max. 2500 ord (5 sider) indsendes til DFS' formand Preben Alstrøm senest 21. marts 1997. De tre bedste bidrag belønnes med hhv. 25, 5 og 2 flasker champagne og offentliggøres i Kvant i løbet af 1997.

Emnet er dansk fysik, både med hensyn til indhold og afgrænsning som faglig disciplin samt med hensyn til de rammer, der i bredeste forstand vil være for faget i Danmark de kommende 25 år. Mange aspekter af dansk fysik kan diskuteres, og der er ingen krav til vægtningen. Eksempler på emner, der kan tages op er: udviklingen indenfor faggruppen af danske fysikere, centrale problemstillinger i dansk fysikforskning, fagets økonomiske, organisatoriske og fysiske rammer, vekselvirkningen med det øvrige samfund, f.eks. erhvervslivet eller via formidling til den brede befolkning og endelig en diskussion af de aktiviteter, der producerer næste generation i dansk fysik, dvs. fysikundervisningen fra folkeskole til universitet.

Hvorledes kan disse elementer tænkes at udvikle sig frem mod år 2022?

Betragtes udviklingen gennem de seneste 25 år, kan der skelnes en række generelle træk: Fysikkens brændpunkter er skiftet; nogle felter er blevet uaktuelle, helt nye spørgsmål er dukket op, og andre problemer har vist sig uventet hårdnakkede. Samtidig har vores omverden ændret sig meget, snart har fysikken haft indflydelse herpå, snart er det omvendt. Universiteternes rolle og forhold er ændret; men hverken deres eller skolernes personale eller selve fysikundervisningen synes endnu at have undergået større fornyelse. I de seneste år har fysikkens og naturvidenskabens status i samfundet været for nedadgående, afspejlet f.eks. i den faldende rekruttering til fagene og det stigende krav om 'relevans' i forskningen, ofte forstået som kommercielt potentiale. Fysikkens rolle som kulturbærende element og fagets erkendelsesmæssige betydning er tilsyneladende forsvundet fra det offentlige image. Det kan synes uoverskueligt at se 25 år frem i tiden, men det er nødvendigt med visioner for hvilken vej, vi ønsker, udviklingen skal gå, og hvordan udviklingen kan påvirkes i den ønskede retning, når første ciffer i årstallet er skiftet.

Vi håber på nogle tankevækkende, morsomme, advarende og inspirerende bidrag. Forfatterne er frit stillet mht. udvalg og vægtning blandt ovennævnte emner eller andre, der findes relevante. Ved jubilæet i år 2022 vil nogle af os kunne se, hvem der fik ret eller – mere interessant – hvilke ideer, der bidrog til at præge udviklingen i en forhåbentlig positiv retning.

Årsmøde 29. – 30. maj 1997

KIF årsmøde 28. maj 1997

Dansk Fysisk Selskab afholder sit årsmøde 1997 på hotel Nyborg Strand i dagene 29. – 30. maj. Som de foregående år afholdes det årlige astronomimøde, sponsoreret af SNF's Instrumentcenter for Jordbaseret Astronomisk Forskning (IJAF), sammen med DFS' møde. Mødet starter torsdag kl. 11 og slutter fredag kl. 17.

Årsmødet vil indeholde plenarforedrag af almen fysisk interesse samt parallelsessioner arrangeret af de faglige sektioner og IJAF. Sideløbende hermed vil forskningsresultater blive præsenteret som posters, og nyt apparatur vil blive fremvist på en udstilling. Under mødet afholder DFS sin årlige generalforsamling.

Alle landets fysikere opfordres til at deltage i Dansk Fysisk Selskabs årsmøde med indlæg og posters og ikke mindst til at bidrage til en livlig diskussion. Især vil vi meget gerne give yngre forskere og forskerstuderende muligheden for at præsentere deres resultater for en bredere kreds.

Tilmeldingsfrist: **21. marts 1997.**

Program

En skitse af årsmødeprogrammet med angivelse af inviterede foredragsholdere og disses foredragstitler vil være tilgængeligt senest 1. marts 1997 på internettet (<http://www.nbi.dk/dfs/>). Endvidere vil det blive opslået på institutionerne, og det kan rekvireres ved henvendelse til Preben Alstrøm, helst pr. e-post; se også KVANT. Det endelige program sammensættes på basis af de indsendte abstracts og udsendes ca. 1. maj.

Indkvartering, priser mv.

Indkvartering foregår på hotel Nyborg Strand. Pris for mødedeltagelse, incl. evt. overnatning og diverse måltider, fremgår af hosstående tilmeldingsblanket. Rette beløb betales ved tilmelding direkte til hotel Nyborg Strand. For studerende, som ikke er indskrevet på Ph.D.-studiet, vil der være et antal fripladser; ansøgning om friplads foregår ved at afkrydse studenterrubrikken på tilmeldingsskemaet (er fripladserne brugt op, og man

alligevel ønsker at deltage, opkræves betaling som for Ph.D.-studerende). Til astronomimødet er der bevilget yderligere støtte fra IJAF til både Ph.D.- og andre studerende.

Transport

Transport til/fra Nyborg sørger deltagerne selv for. Der bliver arrangeret bustransport mellem Nyborg Station og hotel Nyborg Strand; torsdag i forbindelse med IC3-ankomsterne 10.15 og 10.25. Angiv venligst på tilmeldingsblanketten, om der påregnes deltagelse i denne fælles bustransport.

Abstract

Abstract udformes jfr. omstående retningslinier og sendes parallelt med tilmeldingen, men til en af de fire angivne abstract-modtagere.

Sprog

Årsmødets sprog er engelsk. Deltagerne bedes erindre, at hovedparten af tilhørerne er ikke-specialister i det behandlede emne og indrette præsentationen derefter.

Yderligere information

Information vedrørende det faglige program bedes indhentet hos de personer, der modtager abstracts. For andre oplysninger kan man kontakte Preben Alstrøm (adresse jfr. abstractinstruks).

KIF årsmøde 28. maj 1997

Netværk for Kvinder i Fysik (KIF) afholder sit årsmøde onsdag den 28. maj, ligeledes på hotel Nyborg Strand. Mødet, der starter kl. 11, omfatter faglige foredrag af kvindelige danske fysikere samt et foredrag af en udenlandsk fysiker over et mere generelt 'kvinder i fysik'-tema. Alle er velkomne til at overvære foredragene. Dagen afsluttes med et netværksmøde med udveksling af erfaring og diskussion. For yderligere information, kontakt venligst Dorthe Posselt (adresse mv. er anført efter abstractinstruks). Tilmelding og betaling senest 21. marts jfr. hosstående tilmeldingsblanket.

Tilmeldingsblanket

DFS og KIF årsmøder 1997

Navn _____
Institut _____
Adresse _____
Telefon _____ Telefax _____
E-post _____

DFS-årsmødet 29.-30. maj 1997:

- ☐ Fuldt betalende deltager med overnatning; 1600 kr.
- ☐ Fuldt betalende deltager uden overnatning; 850 kr.
- ☐ Ph.D.-studerende med overnatning på delt to-sengsværelse; 1300 kr.
- ☐ Ph.D.-studerende uden overnatning; 850 kr.
- ☐ Studerende (ikke Ph.D.) med overnatning på delt tre-sengsværelse
- ☐ Studerende (ikke Ph.D.) uden overnatning

Overnatning (incl. morgenmad) gælder natten mellem torsdag og fredag. Alle registrerede mødedeltagere kan deltage i alle måltider fra torsdag middag til fredag middag (morgenmad dog kun ved overnatning).

Ph.D.- og andre studerende bor flere på samme værelse. Evt. ønske, om hvem værelse deles med, kan anføres her: _____

☐ Ønsker bustransport mellem station og hotel

Netværk for Kvinder i Fysik 28. maj 1997:

- ☐ Deltager med overnatning (incl. frokost 28/5); 800 kr.
- ☐ Deltager uden overnatning (incl. frokost 28/5); 200 kr.

Overnatning (incl. morgenmad) gælder natten mellem onsdag og torsdag.

Denne blanket samt betaling (samlede beløb hvis deltagelse i begge møder) sendes **senest 21. marts** til:

Hotel Nyborg Strand
vedr. DFS97
5800 Nyborg

Girokonto 801 9231

Dansk Fysisk Selskab • Danish Physical Society

Retningslinier vedr. abstracts

- Maximal størrelse 12 cm × 10.5 cm (bredde × højde).
- Indsenderens navn understreges, og den fulde adresse angives.
- Overhold fristen **21. marts**, DFS er ikke ansvarlig for postforsinkelser.
- Kun originaler af god typografisk kvalitet, ingen fax.
- Foretrukken præsentationsmåde kan angives.

Abstracts indsendes til en af følgende:

Faststoffysik	Preben Alstrøm, Niels Bohr Institut, Blegdamsvej 17, 2100 København Ø (telefon/fax: 3532 5214/3532 5425; e-post: alstrom@cats.nbi.dk)
Atomfysik	Jens Olaf Pepke Pedersen, Ørsted Laboratoriet, Universitetsparken 5, 2100 København Ø (telefon/fax: 3532 0468/3532 0460; e-post: jopp@amo.fys.ku.dk)
Astrofysik	Johannes Andersen, Astronomisk Observatorium, Juliane Maries Vej 30, 2100 København Ø (telefon/fax: 3532 5934/3532 5989; e-post: ja@astro.ku.dk)
KIF	Dorthe Posselt, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 4000 Roskilde (telefon/fax: 4675 7781 – 2607/4675 5065; e-post: dorthe@mmf.ruc.dk)
Generelt	Allan Sørensen, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet, 8000 Århus C (telefon/fax: 8942 3677/8612 0740; e-post: ahs@dfi.aau.dk)

Netværk for Kvinder i Fysik

Yderligere oplysninger vedrørende KIF-årsmødet kan indhentes hos:

Netværk KIF	Dorthe Posselt, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, 4000 Roskilde (telefon/fax: 4675 7781 – 2607/4675 5065; e-post: dorthe@mmf.ruc.dk)
-------------	--

Dansk Fysisk Selskab

NKT's Forskerpris 1997

Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab opfordres hermed til at indsende forslag til modtager af NKT's Forskerpris 1997.

Prisen er på kr. 100.000 og tildeles på ulige årstal en fysiker og på lige årstal en kemiker. Prisuddelingen i 1997 sker ved Dansk Fysisk Selskabs årsmøde den 29.-30. maj.

Tildelingen skal ifølge fundsatsen udtrykke en anerkendelse af en forskningsindsats af betydelig international vægt inden for grundlæggende eller anvendt fysik. Forskningsindsatsen skal være af nyere dato og der lægges vægt på, at prismodtageren er aktiv forsker med tilknytning til dansk fysik. Både yngre og ældre forskere kan komme i betragtning som prismodtagere. Prisen tildeles normalt én person, men kan undtagelsesvis tildeles flere personer, hvis disse har været fælles om og alle har ydet afgørende bidrag til den forskningsindsats, der danner baggrund for belønningen.

Nomineringer indsendes på omstående skema. Derudover kan der medsendes uafhængige støtteskrivelser. NKT Research Center A/S stiller sekretariat til rådighed for priskomiteen. Materialet indsendes til NKT senest den 21. februar 1997.

NKT Research Center A/S
Sognevej 11
2605 Brøndby
att.: Teknologichef Bjørn Marcher

NKT Research Prize in physics 1997

Nomination form

Name of nominee:	
Address:	
Short description of research (max. 50 words):	
Brief curriculum vitae:	
Important publications:	
Peer review (two or more persons for further peer review of the nominee:	1. Name, address and e-mail: 2. Name, address and e-mail: 3. Name, address and e-mail:

Date:

Name(s)

Address(es)

Signature(s)

Submit the nomination including possible references to NKT Research Center by 21 February 1997

NKT Research Center A/S, Sognevej 11, 2605 Brøndby
Att.: Bjørn Marcher, R&D Manager, Polymer Technology

Et mål for tyngden. – Fra Galilei til Huygens

Tom Bøgeskov



Christiaan Huygens

Galilei

Man læser undertiden i nyere fysisk og videnskabsteoretisk litteratur, at Galilei målte tyngdeaccelerationen til $9,8 \text{ m/sek}^2$. Det er i alle henseender forkert. For det første havde Galilei ikke vort begreb om tyngdeacceleration bestemt af dimensionen, hastighed pr. tid. Når den klassiske fysiks pionerer søgte et mål for tyngden, så søgte man et mål for et legemes faldlængde i et bestemt tidsinterval, f.eks. det første sekund (Jvf. 1). Og for det andet så finder man blandt de få (og iøvrigt indbyrdes stærkt afvigende) angivelser af denne art, som findes hos Galilei, ingen værdier, der blot tilnærmelsesvis er ækvivalente med en acceleration på $9,8 \text{ m/sek}^2$.

Men Galilei havde et begreb om en jævnt accelereret bevægelse, som han definerede som følger: "Jeg kalder en bevægelse jævnt eller ensartet accelereret, når den begyndende fra hvile i lige store tidsintervaller øger sin hastighed lige meget." (2, p.172). En definition hvoraf vi hurtigt danner et begreb om acceleration udtrykt ved: $a = \Delta v / \Delta t$.

Men gør vi det, så er vi allerede gået ud over Galilei, som holdt strengt på den euklidske proportionslæres krav om, at relationer mellem størrelser er relationer mellem størrelser af samme art dvs. af samme dimension. Det er da også karakteristisk, at acceleration som fysisk størrelse slet ikke forekommer i de relationer, som Galilei formulerer i sine teoremer om en jævnt accelereret bevægelse. De velkendte 'galileiske' ligninger, $v = gt$ og $s = \frac{1}{2}gt^2$

er regneudtryk, hvis oprindelse skal søges 200 år senere i 1800-tallet.

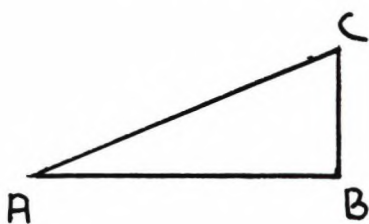
Galilei formulerer faldloven således: "Hvis et legeme falder med en jævnt accelereret bevægelse fra hvile, så forholder de strækninger, det gennemløber i vilkårlige tider, sig til hinanden som kvadratet på disse tider" (2, p.184). Algebraisk kan vi udtrykke princippet i dette teorem som $S_1/S_2 = (t_1/t_2)^2$, hvor "g" (set i vort historiske bakspejl) er forsvundet ved brøkreduktion. Tilsvarende for $v_1/v_2 = t_1/t_2$. Som det ses overholder disse formuleringer den euklidske proportionslæres krav; men det er også denne begrænsning i Galileis matematiske apparat, der udelukker den dimensionale bestemmelse ikke blot af accelerationsbegrebet, men også af hastighedsbegrebet.

At hastigheden af Galilei ikke opfattes som en sammenSAT dimension fremgår entydigt af hans forslag til bestemmelse af en grundenhed for hastighed. Det er i forbindelse med lanceringen af dette forslag, vi tillige finder måltal, der måske (!) kan give os en ide om Galileis forestilling om tyngdens størrelse. Han skriver:

"Vi kan ikke tale præcist om bevægelser og deres hastigheder, hvad enten bevægelsen er jævn eller naturligt accelereret, uden først at fastlægge, hvilket mål vi vil bruge til at måle sådanne hastigheder, ligesom vi også skal bruge et mål for tiden. Med hensyn til tidsmålet har vi allerede det alment anerkendte: timer, minutter, sekunder osv., og ligesom der er et fælles tidsmål, som er anerkendt af alle, således er der også behov for at fastlægge et hastighedsmål, som forstås og anerkendes af alle, dvs. er det samme for alle. Eget hertil er den hastighed, der opnås af naturligt faldende legemer, hvis hastighedstilvækster overalt i verden følger den samme lov. Således er den hastighedsgrad, som f.eks. opnås af en blykugle på 1 pund, når den begyndende fra hvile falder lodret længden en picca (spyd), altid og overalt den samme. Den er derfor velegnet til at udtrykke den hastighedsmængde, der frembringes af det naturlige fald." (2, p.268). Galilei går herefter over til at forklare, hvordan en efter dette princip fastlagt grundenhed for hastighed kan anvendes ved målinger af alle andre vilkårlige hastigheder. Og i denne forbindelse bruger han som talekseksempel et fald af længden 1 picca på 4 sekunder. Da 1 picca er Ca. 5 meter, så implicerer disse tal altså en tyngdeacceleration på cirka $0,6 \text{ m/sek}^2$. Men Galilei har tydeligvis ikke et sådant sigte med sine betragtninger, endsiige overvejet talværdiernes konsekvenser. Der er tale om et vilkårligt regneekseksempel til anskueliggørelse af et princip. At det netop forholder sig på denne måde med et lignende eksempel, har vi eksplicit vidnesbyrd om i en af Galileis brevvekslinger. Han taler i "Dialog om de to systemer" - i forbindelse med en redegørelse for principperne for en beregning af faldtiden

over en afstand fra Månen til Jorden - om "en jernkugle på 100 pund, som ved gentagne forsøg falder fra en højde af 100 alen på 5 sekunder". Da den florentinske alen er 0,583 meter, implicerer dette en tyngdeacceleration på $4,664 \text{ m/sek}^2$ eller et fald i det første sekund på 4 alen, dvs. 2,332 meter. Som det vil fremgå, så ved Galilei, at disse 5 sekunder næppe er det rigtige; han kender ikke den rigtige faldtid. Men han ved også, at han er afskåret fra at kende den: han mangler et ur, som kan måle sekunder.

Vennen Battista Baliani spørger i et brev Galilei om, "hvilke grunde der forsikrer, at det er fem sekunder?". Galilei svarer (1. juli 1639) med følgende redegørelse: "De siger, at De gerne ville have erfaret det forsøg, hvormed jeg har kunnet forvisse mig om, at et tungt legeme, som falder lodret fra hvile, gennemløber 100 alen på 5 sekunder. Her søger vi to ting: for det første tiden for faldet ad de 100 alen; og for det andet at finde hvilken andel denne tid udgør af jordbevægelsens 24 timer. Hvad angår den første opgave, så giver faldet af den kugle, som jeg lod falde langs en kanal med vilkårlig hældning, os alle tider, ikke blot for de 100 alen, men også for alle andre vilkårlige længder for et lodret fald, idet længden af denne kanal, dvs. skråplanet, er mellemproportional mellem planets lodrette højde og længden af hele den lodrette strækning, legemet ville falde i samme tid." (3, p.76)



Dvs: hvis vi kender tiden for bevægelsen på skråplanet, CA, så kan vi finde den strækning $S = AC^2/BC$, legemet vil falde ved et frit fald i samme tid. Og vi kan så på grundlag af teoremet om faldvejens proportionalitet med kvadratet på tiden finde faldtiden for vilkårlige faldveje.

Men problemet er netop målinger af tiden. Galilei fortsætter: "Vi mangler nu at finde størrelsen af faldtiden langs kanalen. Dette opnår vi ved hjælp af en forunderlig egenskab ved pendulet, nemlig at alle dets svingninger, store eller små, forløber i lige store tider. Man beder, for en passende modydelse, to, tre eller fire nysgerrige og tålmodige venner, som har udset sig en fiksstjerne med en position, som svarer til et stabilt mærke, og som er udstyret med et pendul af vilkårlig længde, om at gå i gang med at tælle dets svingninger i hele den tid, der går, indtil den samme fiksstjerne vender tilbage til det samme sted; man har så antallet af svingninger i 24 timer."

Man finder da antallet af svingninger pr. sekund, og på grundlag af den omvendte proportionalitet mellem pendullængde og kvadratet på antal svingninger pr. tidsenhed finder man så længden af et sekundpendul. (Et sekundpendul er et pendul hvis halve periode er et sekund, red.)

Men selv om Galilei utvivlsomt havde både nysgerrige og tålmodige venner, så forblev dette tidsmålingsprojekt ved tanken.

Galilei brugte faktisk penduler ved sine skråplansforsøg. Men i brevet til Baliani skriver han også, at han opnåede mere præcise resultater med det "vandur", som beskrives i den publicerede redegørelse for disse forsøg (2, p.189): En stor vandbeholder, hvor der gennem en tap i bunden strømmer en tynd stråle, som opsamles i den tid, faldet varer, og derefter vejes; forholdet mellem vægtene giver forholdet mellem tiderne.

Dette arrangement var i princippet tilstrækkeligt til det, som var Galileis primære formål med skråplansforsøgene, nemlig eksperimentel bekræftelse af faldvejens proportionalitet med kvadratet på tiden. Bestemmelsen af de absolutte faldtider lå uden for hans muligheds rækkevidde. Og han svarer da også Baliani, at den i "Dialogen" angivne faldtid på 5 sekunder for 100 alen sikkert er forkert, men at dette iøvrigt er uden betydning i forhold til den brug, han gør deraf, nemlig demonstrationen af, hvordan han mener at kunne beregne faldtiden fra Månen til Jorden, hvis han kender faldtiden for en anden vilkårlig afstand. Der er igen tale om et regneeksempel.

Marin Mersenne

Ikke desto mindre blev Galileis 5 sekunder for et fald på 100 alen i samtiden taget bogstaveligt og giver bl.a. Mersenne grunde til at så tvivl om Galileis eksperimenter. Mersenne, der er sikker på, at et legeme vil falde mere end 4 alen på 1 sekund, går selv i gang med at eksperimentere for ad empirisk vej at finde faldlængden i det første sekund.

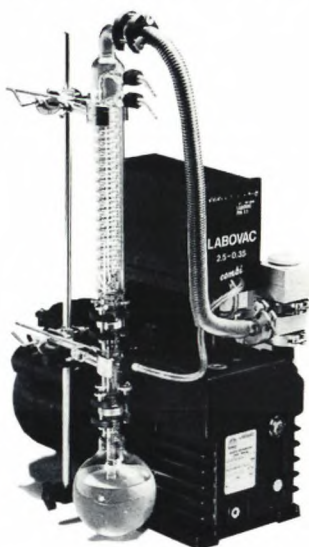
Han meddeler i Harmonie Universelle (1636) (de relevante tekstuddrag er optrykt som appendiks i 10) resultaterne af en række faldforsøg, som er gennemført med "bistand fra lærde personer", og som er "gentaget mere end 50 gange". Forsøgsopstillingen var enkel: han lod en blykugle på et halvt pund falde fra forskellige højder og målte faldtiden ved hjælp af et (formodet) sekundpendul.

Længden af Mersennes pendul var 3,5 pariserfod dvs. 1,1368 meter, og var bestemt i forhold til "forskellige almindelige ure", dvs. "tandhjulsure", altså de ikke særligt præcise loddrevne ure fra før Huygens' tilføjelse af et gangregulerende pendul. Mersenne problematiserer da også selv længden af sit sekundpendul. Ved senere forsøg reducerer han det til 3 fod (0,9744m).

Men udstyret med denne upræcise tidsmåler måler han faldtider for længder på 110 og 146,5 fod til henholdsvis 3 og 3,5 sekunder. Under hensyntagen til usikkerheden og "justeret efter proportionen" (dvs. faldvejens proportionalitet med kvadratet på tiden), kan han heraf slutte at et legeme i det første sekund falder 12 fod (3,9 m)

Mersenne meddeler også en række skråplansforsøg, hvor han ved anvendelse af planer med forskellig hældning, men med samme højde (5 fod) sammenligner faldveje og -tider for planet med det lodrette fald på 5 fod. Alle Mersennes målinger ved disse forsøg giver meget

MODERNE VAKUUMTEKNIK TIL FORSKNING OG INDUSTRI



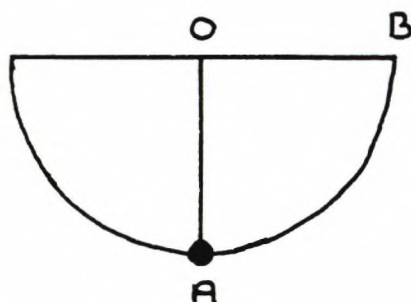
SASKIA HOCHVAKUUM- UND LABORTECHNIK GmbH I ILMENAU er et succesrigt resultat af øst-vest genforeningen i Tyskland. SASKIA's et- og to-trins finvakuumpumper fra 4 til 200 m³h⁻¹ har rotor-skiver af et nyt PTFE materiale som sænker støjniveauet med ca. 3 dBA og tillader pumperne at arbejde konstant ved højt tryk eller med aggressive gasser. Med en frekvensregulering kan pumpehastigheden fordobles, så man f.eks. hurtigt kan evakuere et anlæg og derefter anvende pumpen som holdepumpe ved lav hastighed. SASKIA's kemisk resistente membran-pumper har liniærdrevne membraner, hvilket sikrer en lang levetid og lavt effektforbrug. En membranpumpe på ca. 30 W kan med de store afgifter på brugsvand hurtigt tjene sig ind, hvis den erstatter en vandstråle-pumpe. SASKIA's TOWER pumpestande er kemipumpestande kombineret med kondensatorer og med instrumentering for indstilling af trykket. SASKIA leverer oliefri pumpestande kombineret med turbomolekularpumper i et handy design og rootspumpestande op til 20.000 m³h⁻¹.

ALLE FORMER FOR OLIEFRI & OLIESMURTE ROTATIONSVAKUUMPUMPER • FEDTSMURTE TURBOMOLEKULAR- SPIRO- & HYBRIDPUMPER • DIFFUSIONS- & CRYOPUMPER • VAKUUMMÅLEINSTRUMENTER, VENTILER, HV & UHV FITTINGS • HELIUMLØKSØGERE & MASSESPEKTROMETRE • SPUTTER- ELEKTRONKANON & ÆTSEANLÆG • RF & HV STRØMFORSYNINGER • RUSTFRI SPECIALKAMRE & DELE • OMBYGNING AF VAKUUMANLÆG

WENZEL VAKUUM TEKNIK APS • NYBROVEJ 283 • DK-2800 LYNGBY • TLF. 45 87 97 35
SHOWROOM, SERVICE, LAGER • NYBROVEJ 193 • BIL 30 42 63 00 • FAX 45 93 32 93

dårlige resultater. Og det er en desillusioneret eksperimentalfysiker, der må konkludere: "erfaringen giver os ingen sikre resultater".

Og denne desillusionering bliver ikke mindre, da Mersenne få år senere opdager, at forholdet mellem hans måltal for sekundpendulets længde og faldlængden i det første sekund, var i modstrid med den - iøvrigt rigtige - antagelse, at et frit fald langs en cirkelradius er hurtigere end et fald langs den kvarte cirkelperiferi:



Hvis OA (3,5 fod) er et sekundpendul, så vil lod-det falde langs cirkelperiferien BA på et halvt sekund (Mersenne og Galilei troede at det cirkulære pendul er isokront, dvs har samme periode uanset udsvingets

størrelse). Men falder et legeme lodret 12 fod på 1 sekund, så vil det falde OA 3,5 fod på 0,54 sekund. Eller med andre ord: Konsekvensen af Mersennes målinger er, at loddet vil falde hurtigere langs cirkelperiferien BA end lodret langs OA. Og reduceres sekundpendulet til 3 fod, så bliver følgen, at de to bevægelser vil forløbe i samme tid, nemlig 0,5 sekund.

Mersenne fremdrager denne vanskelighed i skriftet *Cogita physica-mathematica* (1644), hvor han erkender, at han "ikke ser nogen løsning", idet på den ene side de på gældende måltal "er bekræftet ved mange observationer", og på den anden side: "observationerne i dette spørgsmål er fejlagtige". Men det store problem for Mersenne er ikke blot vanskelighederne med at foretage nøjagtige målinger; han mangler tydeligvis også en teori for sammenhængen mellem det frie fald og pendulbevægelsen. Det er først Huygens, der i 1650'erne finder den matematiske relation mellem den vertikale faldvej i det første sekund og længden af sekundpendulet: $S_{sek} = 1/2\pi^2 \cdot l_{sek}$.

Giambattista Riccioli

Efter udgivelsen af Galileis "Discorsi" i 1638 er der en stigende interesse i at kontrollere de heri fremførte bevægelsesteoremer. Denne interesse kommer bl.a.

til udtryk i en omfattende eksperimentel virksomhed i 1640'erne under ledelse af jesuiten Giambattista Riccioli, som var filosofiprofessor i Bologna. Resultaterne af Ricciolis undersøgelser publiceres 1651 i det omfattende værk *Almagestum Novum* (værkets titel-blad er reproduceret på forsiden af KVANT, oktober 1996).

Riccioli bekræfter pendulbevægelsens isokroni og pendullængdens omvendte proportionalitet med kvadratet på antallet af svingninger. Han begiver sig ved hjælp af "nysgerrige" og meget "tålmodige" venner ud i en veritabel eksperimentel tour de force, i en række forsøg på at bestemme længden af et sekundpendul. Han gennemfører faldforsøg fra tårne og kirker, hvor han falsificerer den aristoteliske tese, at faldtiden er omvendt proportional med vægten, og han bekræfter Galileis teorem om faldvejens proportionalitet med kvadratet på tiden. Og endelig giver han på grundlag af målinger det historisk hidtil mest præcise bud på faldlængden i det første sekund.

Det mest fantastiske af Ricciolis eksperimenter er forsøget på at bestemme længden af sekundpendulet. Assisteret af 9 jesuitterpræster gennemfører han Galileis ide om at tælle svingninger i 24 timer - ikke blot én, men to gange; et tredje forsøg måtte opgives, da vennernes tålmodighed slap op. Resultaterne af disse forsøg, hvor assistenterne, som var trænede i en følsom skubbeteknik for at holde pendulerne igang, måtte tælle over 87.000 svingninger, blev naturligvis ikke præcise. Og dog - alt taget i betragtning: forsøgene gav længder for et sekundpendul i intervallet 0,97 til 1,02 meter.

Til brug ved sine faldforsøg i sommeren 1645 konstruerede Riccioli et meget kort pendul på 1,15 tommer (2,8 cm) med en anslået svingningstid på 1/6 sekund (dette implicerer $l_{sek} = 1,02$ meter). Men på grund af vanskelighederne ved at bruge et så hurtigt pendul benytter han det ikke direkte; han omsætter det i en menneskelig tællen på bolognesisk folkemål, hvor tallene fra 1 til 10 er enstavelsesord, således at udsigelsen af hvert tal giver "den tid som en enkelt svingning af vort pendul udmåler". Til at foretage denne tællen udvalgte han så to assistenter med evner for musik og dermed sans for "den musikalske puls' regelmæssighed".

Det var dette "ur", han benyttede ved sine faldforsøg. Og med dette på én gang primitive og raffinerede "videnskabelige instrument" måler Riccioli faldlængden i det første sekund for en lerkugle med en diameter på cirka 20 cm til 15 romerske fod = 4,4355 meter.

Christiaan Huygens

Otte år efter publiceringen af Ricciolis resultater genoptager Huygens arbejdet for at bestemme tyngdeaccelerationen eller rettere faldlængden i det første sekund. 1659 er et uhyre produktivt år i Huygens' forskningsliv. Det er i dette år, han beviser, at banen for en isokron pendulbevægelse er en cykloidebue, hvilket fører ham til konstruktionen af det forbedrede pendulur, som ligger til grund for nye og ret præcise bestemmelser både af faldvejen i det første sekund og af længden af et sekundpendul.

Det er i dette år, han skriver sin afhandling "Om centrifugalkraften" (*De Vi Centrifuga*, påbegyndt den 21.okt.), hvor han bl.a. finder svingningstiden for et konisk pendul og dens forhold til tiden for et frit fald langs pendulets dobbelte højde. I december finder han svingningstiden for et simpelt pendul og dets forhold til tiden for et frit fald langs den halve pendullængde. Huygens er således langt bedre teoretisk udrustet end Mersenne og Riccioli; og det er heri, vi må søge årsagen til hans succes i bestemmelsen af de måltal, som kostede forgængerne så mange praktiske kræfter.



Samme dag som Huygens begynder redigeringen af *De Vi Centrifuga*, gentager han et af Mersennes eksperimenter:

Med et søm (se figuren) fæstner han et pendul til væggen. Længden af pendulet er 3 rhinske fod og 1 tomme. Idet han antager at dette er længden af et sekundpendul, vil blyloddet ramme væggen med et smæld 1/2 sekund efter det slippes. Men samtidig med at pendul-loddet slippes, slipper han også en lignende løs blykugle fra hånden. Ved at justere højden over stolen kan han da finde den faldlængde, hvor de to smæld fra kuglerne lyder som ét. Han noterer resultatet: "Kuglen falder på et halvt sekund fra højden 3 fod og 6 eller 7 tommer. Ergo falder den på ét sekund 14 fod." (6, p.278). Da 14 fod er 4,39 meter er resultatet altså dårligere end Ricciolis.

To dage senere (23.okt.) gentager han forsøget, men denne gang med et pendul af længden 6 fod og 11 tommer, som formodes at udføre en halv svingning (til væggen) på 3/4 sekund. Han får nu resultatet 13 fod og 7 1/2 tomme. Huygens kender endnu ikke den rigtige længde af et sekundpendul endsige den matematiske relation mellem et sådant og faldvejen ved frit fald i det første sekund.

Men den 15.november sker der noget nyt. *Han bryder ud af emperiens lukkede kredse*. Han gør endnu et forsøg, hvor han denne gang ved hjælp af et snorarrangement sikrer en samtidig udløsning af begge lodders bevægelse.



Læksøger på heliumbasis

Hvilke krav stilles der?

- ★ Hurtig
- ★ Nem og entydig betjening
- ★ Oliefri indsugning
- ★ Robust
- ★ Enkelt service
- ★ Prisbillig

Anvendelse:

- ★ Kvalitetskontrol
- ★ Forskning og udvikling
- ★ Analyseudstyr
- ★ Høj -og ultrahøjvakuum

Leybold ApS
Roskildevej 342A
2630 Tåstrup
Tlf.: 43996444
Fax: 43996544



Igen bruger han et pendul, som formodes at ramme væggen efter $3/4$ sekund. Han måler det løse lods faldlængde i dette tidsinterval til 8 fod og 7 tommer. Men samtidig må han konstatere, at resultatet er behæftet med usikkerhed. Han skriver i sin journal:

"Selv om faldhøjden øges eller mindskes med 3 eller 4 tommer, kan man ikke skelne de to smæld. Vil man finde det præcise mål, opnår man intet på denne måde. Men i forhold til et konisk penduls bevægelse må det være 8 fod og $9\frac{1}{2}$ tomme, hvoraf det følger, at et faldende blylod på 1 sekund må gennemløbe cirka $15\frac{6}{10}$ fod. Det er tilstrækkeligt, at eksperimentet ikke modsiger dette måltal, men blot, i den udstrækning det kan, bekræfter det." (6, p.281).

Huygens opgiver med andre ord at finde faldvejen ved empiriske målinger for i stedet at deducere den ud fra teoretisk indsigt i pendul-bevægelsen og i stedet bruge eksperimentet som bekræftelse. Angivelsen " $15\frac{6}{10}$ fod" er i manuskriptet overstreget og erstattet med 15 fod og 7,5 tommer. Denne rettelse er, som det vil fremgå, formodentlig sket i december samme år.

Uret og sekundpendulet:

Hvor Mersenne og Riccioli empirisk havde søgt at

bestemme længden af et sekundpendul for at konstruere en tidsmåler, der går Huygens nu den modsatte vej: Han begynder med uret, ja han har det allerede; man behøver ikke at kende den præcise længde af sekundpendulet for at konstruere et ur, der går præcist. Denne omvendte rækkefølge fremgår bl.a. af Huygens' redegørelse i det senere publicerede værk om penduluret (7).

Han konstruerer et pendul- og tandhjulsur, der er gearret således, at viserne drejer 24 timer for 86400 pendulslag. Principielt kan han begynde med en vilkårlig pendullængde; men han står ikke på bar bund, han kender den omtrentlige værdi for længden af et simpelt sekundpendul, og han har tillige fundet metoden til at bestemme det fysiske penduls reducerede længde. Han kan nu afprøve urets gang i forhold til stjernedøgnet og justere det over en periode, idet han også kender relationen mellem ændringer i gangen og ændringer i pendullængde. Han har nu en præcis tidsmåler, som han kan bruge ved optælling af et vilkårligt penduls antal svingninger i f.eks. 1 time. Og ved brug af sætningen om den omvendte proportionalitet mellem pendullængden og kvadratet på svingningstallet pr. tidsenhed kan han beregne længden af sekundpendulet.

Det fremgår af Huygens' notater (6, p.100), at han i slutningen af 1659 har arbejdet med et pendul af

længden 6,18 tommer, som udfører 4464 dobbelte slag i timen. Heraf kan han så beregne sekundpendulet: $l_{sek} = 6,18 \text{ tommer} \cdot (2 \cdot 4464)^2 / 3600^2 = 38 \text{ tommer}$, hvilket er ækvivalent med 0,9940 meter. Den moderne standardværdi (Greenwich) er 0,9936 meter.

Faldvejen i det første sekund

Dette resultat ville have været en lækkerbidsken for Mersennes og Ricciolis empiriske faldforsøg; men Huygens går igen en anden vej: Det er ligeledes i efteråret 1659, han finder, at den sande isokrone bane for en pendulbevægelse er cykloiden, og i forlængelse heraf (december 1659) beviser han matematisk, at tiden for en enkeltsvingning langs cykloiden forholder sig til faldtiden for et frit fald langs diameteren af cykloidens genererende cirkel (dvs. en halv pendullængde) som omkredsen af en cirkel til diameteren, dvs. som π . Et udsagn som er ækvivalent med en senere tids algebraiske udtryk for pendulets svingningstid: $T = \pi \cdot \sqrt{l/g}$.

Den følgende udledning af faldvejen i det første sekund er en formalisering af den metode, Huygens bruger ved den publicerede beregning (7, p.171), og hvor han netop (jvf. erfaringen fra 15.nov.) understreger, at denne udledning er mulig "uden eksperiment", hvis blot ovenstående teorem og længden af sekundpendulet er givet:

Hvis vi betragter et sekundpendul ($T = 1 \text{ sek.}$), så er tiden, t for et frit fald langs det halve af pendullængden, l , ifølge teoremet: $t = 1 \text{ sek}/\pi$, og da faldvejen er proportional med kvadratet på tiden, så kan man umiddelbart finde faldvejen i det første sekund, S_1 , idet $2 \cdot S_1/l = \pi^2$, eller $S_1 = \frac{1}{2}\pi^2 \cdot 38 \text{ tommer}$. Faldvejen i det første sekund bliver således beregnet: 15 fod og 7,5 tommer (4,905 m), altså netop den værdi, som senere er indført i notatet af 15.november.

Det koniske pendul

I notatet siger Huygens imidlertid, at resultatet er beregnet på grundlag af et konisk pendul. Men det er uklart, hvilket pendul han måtte have benyttet. Vi ved, at Huygens i første halvdel af november arbejdede intenst med koniske penduler (hyppigt med en topvinkel på 90°), og at han analyserede deres bevægelse teoretisk i afhandlingen om centrifugalkraften. I afhandlingens "Proposition VI" (5, p.276 ff) gennemfører han et ræsonnement, hvor de principielle relationer (i moderne notation) er som følger:

Hvis centrifugalkraften i en jævn cirkelbevægelse er lig "tyngden", dvs. $g = v^2/r$, så er perioden $T = 2\pi\sqrt{r/g}$; og tiden for et frit fald med samme acceleration er $t = \sqrt{2S/g}$. Heraf følger det så (for $T = t$), at et legemes faldvej ved et frit fald i samme tid, som det samme legeme vil være om at gennemføre en hel cirkelbevægelse, er $S = 2r \cdot \pi^2$. Og da radius i et konisk pendul, hvor keglens halve topvinkel er 45° , er lig højden, og denne højde i et konisk sekundpendul er lig et kvart simpelt sekundpendul, dvs. 9,5 tommer, så finder man igen faldvejen ved frit fald i det første sekund: 15 fod og 7,5 tommer.

Tyngdeaccelerationen, g

I Koyrés artikel (8) med samme emne som nærværende sammenfatter denne - ligesom udgiverne af Huygens' *Oeuvres* (6) - hele Huygens' udledningsræsonnement i en enkelt formel udledt af formlen for et penduls svingningstid:

$g = (4\pi^2 \cdot n^2 \cdot l) / 3600^2$, hvor n er antallet af dobbelte slag pr. time.

Denne formel, skriver Koyré, "er almen gyldig og bestemmer værdien af g som en funktion af længden og hastigheden af et hvilket som helst pendul, vi måtte benytte. Det er faktisk et temmelig kort og hurtigt pendul, Huygens har benyttet, kun 6,18 tommer langt, og 4464 dobbelte svingninger pr. time. Følgelig konkluderede Huygens, at værdien af g er 31,25 fod, dvs. 981 cm, hvilket er den værdi, som har været anerkendt lige siden." (8, p.234)

Denne udgang på historien om Huygens og størrelsen af "tyngden" er strengt taget problematisk, idet størrelsen 31,25 fod (dvs. det dobbelte af 15 fod og 7,5 tommer), end-sige 31,25 fod/sek², ikke forekommer i kilderne. Og det gør den ikke af den simple grund, at begrebet om tyngdeacceleration, som vi kender det, endnu ikke var udmøntet i 1600-tallet.

Huygens foresatte sig at finde det præcise mål for "tyngden" (gravitas) ved hjælp af penduler. Men "tyngden" selv indgår kun direkte i argumentationen som en teoretisk størrelse, som ækvivalerer centrifugalkraften i et konisk sekundpendul. Kender man radius i dette pendul, så kan man deducere faldlængden ved frit fald i det første sekund. Og denne længde var den tidlige klassiske fysiks mål for størrelsen af "tyngden". Begrebet om tyngdeacceleration lå uden for periodens begrebsmæssige horisonter.

Det er derfor også lidt af en tilsnigelse, når Koyré siger, at værdien $g = 31,25 \text{ fod/s}^2$ har været "anerkendt lige siden". Men der er det rigtige i det, at de værdier for sekundpendulet (3 pariserfod og 8,5 linier) og for faldlængden i det første sekund ($15\frac{1}{12}$ pariserfod), som Huygens offentliggjorde i 1673 (7), finder international anerkendelse som mål for tyngden, bl.a. også hos Newton.

Newton selv opererer heller ikke med en eksplicit størrelse af tyngdeaccelerationen. Og der skjuler sig heller ikke i Newtons tekster nogen fast standardværdi for tyngdeaccelerationen ækvivalent med 31,25 rhinske fod/sek². Analyserer man en række af hans praktiske beregninger, så finder man, at de implicerer g -værdier, som ligger i det mindste i intervallet 9,79 til 9,83 m/sek²

Tyngdens variation

Men fra begyndelsen af 1670'erne stillede spørgsmålet om en standardværdi for tyngden sig på en helt ny måde, idet man blev opmærksom på, at tyngden på grund af jordrotationen varierer med den geografiske bredde. Huygens behandler denne nye kendsgerning i en senere afhandling om tyngdekraften (4); og Newton behandler den i Principias 3.bog (Proposition XX) under overskriften: "At finde

Melles Griot makes OPTICS, OPTO-MECHANICS, LASERS, INSTRUMENTS, and FIBER OPTICS



Contact Melles Griot for a fast response to your photonics needs. Our vast product selection described in our detailed product literature will provide solutions for a successful product or experiment.

Whether you need a single lens, or thousands of laser assemblies, Melles Griot is ready to deliver. From a single prototype to full-scale production, we can ship to your schedule. Melles Griot has earned a 25 plus year reputation as a quality manufacturer of optics, opto-mechanics, lasers, instruments, and fiber optics.

We have facilities in North America, Europe, and the Asia Pacific staffed with applications engineers ready to fulfill your requirements. You can reach us by phone, FAX, or the INTERNET.

From simple lenses to advanced fiber optics — Melles Griot is your *first choice* in photonics!

**Call, FAX, or E-mail us today
for your photonics solutions!**

Melles Griot Danmark

Stenagervej 13 • DK-4100 Ringsted
Phone: 53 61 50 49 • Fax: 53 61 60 49
E-mail: 101456.567@compuserve.com



OPTICS

- Beam Expanders
- Beamsplitters
- Coatings
- Custom OEM Optics
- Custom Optical Assemblies
- Cylindrical Optics
- Diode Laser Optics
- Filters
- Invaritar Lenses
- Lenses
- Micro Optics
- Mirrors
- Optical Design Software
- Polarizers
- Prisms
- Shutters & Irises
- YAG Lenses

OPTO-MECHANICS

- Breadboards
- Optical Tables & Isolators
- Opto-Mechanical Mounts
- Positioning Equipment
- Workstations

LASERS

- Diode Lasers & Assemblies
- Helium Neon Lasers

INSTRUMENTS

- Amplifiers
- Beam Position Measurement
- Beam Profilers
- Diode Laser Drivers
- Diode Laser Controllers
- Optical Spectrum Analyzers
- Power & Energy Meters
- Power Supplies
- Wavefront Analyzers

FIBER OPTICS

- Reflective Fiber Gratings
- Circulators
- Isolators
- Tree Couplers
- Attenuators
- Fiber Collimators

MELLES GRIOT

og sammenligne legemers tyngde i forskellige regioner af vor Jord". Men heller ikke her finder vi noget direkte mål for "tyngdens" størrelse noget steds. Vi finder en teoretisk bestemmelse af proportionaliteten mellem tyngdens tilvækst (fra Ækvator til Pol) og kvadratet på sinus til breddegraden; og derfra udledes forholdet mellem tyngden på Paris' bredde og på Ækvator, hvorefter Newton, idet han bruger Huygens mål for sekundpendulet i Paris, beregner tyngdens størrelse ved Ækvator udtrykt ved længden af et sekundpendul (3 pariserfod og 7,468 linier = 0,9912 m).

Måler man tyngden, f.eks. ved pendulforsøg, så finder man tyngdekraften som en vektorsum af en massetiltrækning (et gravitationsfænomen) og en centrifugalkraft (et bevægelsesfænomen). Den resulterende vektor har størrelsen:

$$F = GMm/R^2 - m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos^2 b,$$

hvor ω er jordrotationens vinkelhastighed, b er breddegraden, og hvor den dimensionale homogenitet mellem de to led på højre side, forudsætter den tunge masses og inertialmassens proportionalitet.

"Tyngdeacceleration" (eller den gravitationelle feltstyrke, F/m) er i den udviklede klassiske mekanik et langt mere komplekst begreb end "faldlængden i det første sekund" (eller længden af et sekundpendul). Begrebet om tyngdeacceleration indtager en bestemt plads i et sammenhængende teoretisk system som et specialtilfælde, dvs. som et begreb om lokal manifestation af den universelle gravitation.

Så når Huygens ved en imponerende indsats i 1659 finder en ret præcis størrelse, en faldlængde, som mål for "tyngden", så er der også grund til at pointere, at denne indsats fandt sted inden for en principielt anderledes begrebsmæssig og teoretisk forståelsesramme end den, hvori en senere tid har tænkt spørgsmålet om tyngdens størrelse.

Note: Længder

1 fiorentinsk fod = 1 romersk fod = 0,2957 m
1 pariserfod (pied de Roi) = 0,3248 m
1 rhinsk fod = 0,3139 m
Foden deles i 12 tommer, som igen deles i 12 linier.

Referencer:

- 1) Tom Bøgeskov: Hvordan beregnede Newton centripetalaccelerationen i Månens bane?, KVANT, juni 1995
- 2) Galilei: Discorsi e dimostrazione mathematiche intorno a due nuove scienze. Torino 1990 (1638)
- 3) Galilei: Le Opere di Galileo Galilei, vol.18. Firenze, 1906
- 4) Huygens: Discours de la cause de la pesanteur (1690), Oeuvres Completes, vol.21. Haag, 1944
- 5) Huygens: De Vi Centrifuga (1659), Oeuvres Completes, vol.16. Haag, 1929

- 6) Huygens: Diverse optegnelser (okt.-dec. 1659), Oeuvres Completes, vol.17. Haag, 1932
- 7) Huygens: The Pendulum Clock. Ames, Iowa, 1986 (1673)
- 8) Alexandre Koyré: An experiment in measurement. Proceedings of the American Philosophical society, vol.97, no.2, april 1953



Tom Bøgeskov er mag.art. i litteraturvidenskab og har især beskæftiget sig med filosofi, idé og videnskabshistorie.

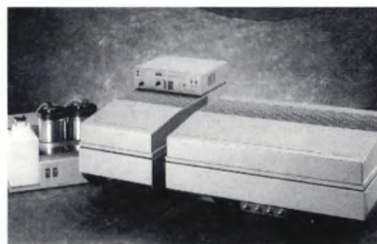


optilas

Optilas Danmark, den lokale internationale leverandør med specialer indenfor:

Optik og lasere til forskning og industri

Continuum, Inc. - Corion Corp. - CVI Laser Corp. - Ion Laser Technology, Inc. - Labsphere, Inc. - Laservision - Optical Surfaces Ltd. - Physical Optics Corp. - Research Electro Optics - Santa Fe Laser Co. - Synrad, Inc. - m.fl.



Spektroskopisk udstyr

Chromex, Inc. - McPherson Milton Roy - Photek Ltd. m.fl.



Elektronik

Directed Energy, Inc. - Maxwell Laboratories, Inc. - Quantum Design, Inc. - Stanford Research Systems, Inc. - Trek, Inc. - m. fl.

Optilas Danmark

Billedvej 2

DK-2100 København Ø

Telefon: 3543 0133

Fax: 3543 8334

E-mail: optilas@inet.uni-c.dk

To ud af tre – de klassiske problemer

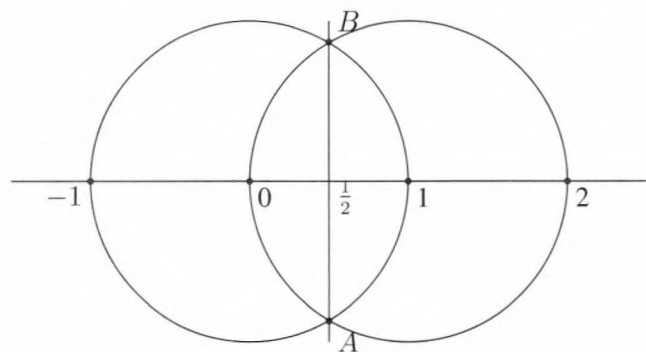
Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø

Indledning

Der er, som alle jo ved, tre klassiske problemer i geometrien, der alle tre drejer sig om konstruktion med passer og lineal. Det ene er cirkelns kvadratur, dvs. den opgave, at konstruere et kvadrat med samme areal som en given cirkel. En opgave, der kan formuleres sådan, om det er muligt at konstruere et liniestykke med længden π . Denne opgave vil vi lade ligge.

De to andre vedrører begge tallet tre. Vinklens tredeling går ud på at konstruere en vinkel, der er en trediedel af en given vinkel, mens terningens fordobling går ud på at konstruere et liniestykke med længden $\sqrt[3]{2}$. Til den sidste opgave hører historien, at en sot, der plagede indbyggerne på øen Delos, ifølge oraklet i Delphi ville ophøre, når man fordoblede – i rumfang – templets kubiske alter.

Ingen af disse opgaver kan løses; i det følgende skal jeg forklare, hvad vi mener med det. Der er flere uklarheder i formuleringen, *Vi kan ikke tredede vinkler*. Dels er der *kan*, der her betyder, ikke blot at vi ikke har fundet ud af det endnu, men at vi har fundet ud af, at det aldrig vil kunne lade sig gøre. Dels de begrænsninger, der er i hjælpemidlerne, nemlig at vi kun vil tillade en ganske indskrænket brug af to hjælpemidler, passer og lineal.



Figur 1

Problemformulering

Først må vi forstå, hvad konstruktion med passer og lineal vil sige. Vi vil tillade os følgende. I begyndelsen kan to punkter være givet, men ikke flere. Vi kan så dels tegne de cirkler, der har det ene punkt som centrum og går gennem det andet, dels den linie, der går gennem de to punkter. Herefter kan vi inddrage de ny skæringspunkter, der måtte forekomme, og med dem gentage operationerne. Anden brug af værktøjerne er ikke tilladt.

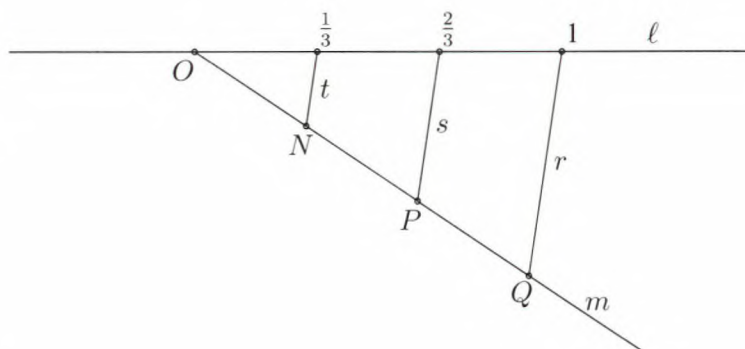
Lad os nu antage, at vi har to forskellige punkter, som vi kalder 0 og 1. Vi tegner linien gennem de to samt cirklerne

med det ene som centrum gennem det andet, finder de to cirklers to skæringspunkter med hinanden og med linien. Derefter tegner vi linien gennem cirklernes skæringer med hinanden.

De således vundne punkter, $-1, 2, A, B, \frac{1}{2}$ er eksempler på punkter, der er fremkommet ved konstruktion. Nu er punkterne på linien gennem 0 og 1 angivet ved tal, fordi de svarer til tal. Liniestykket fra -1 til 0 er lige så langt som liniestykket fra 0 til 1, mens liniestykket fra 0 til 2 er dobbelt så langt.

Vi kan konstruere alle de punkter, der svarer til rationale tal, f. eks. kan vi tredede et liniestykke således:

Konstruktionen foregår i alfabetisk orden, således at $NP = ON$, $PQ = ON$, r går fra q til 1, s og t er parallelle med q . Disse linier skærer nu ℓ i punkter, der svarer til $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$. Her er underforstået, at vi har lært at tegne parallelle linier med passer og lineal.



Figur 2

Betragter vi en cirkelbue i stedet for et liniestykke, som i figur 3, kan vi halvere buen simpelt hen ved at halvere den tilsvarende korde, $1P$, kalde midtpunktet Q og tegne linien gennem 0 og Q . Den skærer cirkelbuen i midtpunktet R .

Spørgsmålet er nu, om vi med denne brug af passeren og linealen nogensinde vil nå til det punkt på cirklen, der nøjagtig tredeler den givne vinkel?

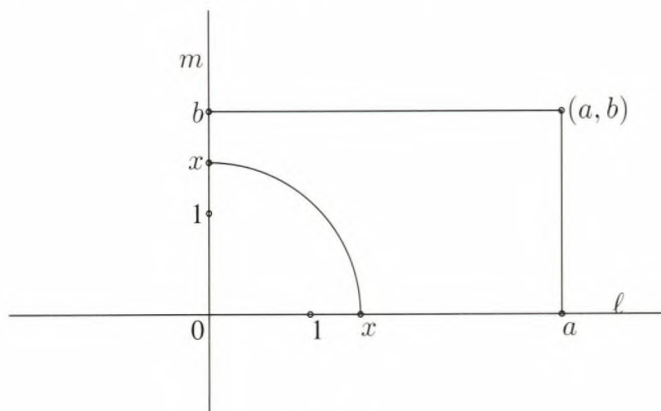
Indskydning

Indskrænkningen i reglerne for især linealens brug er ganske væsentlig. Allerede i oldtiden kunne man tredede en vinkel ganske nøjagtigt ved en udvidet brug af en lineal:

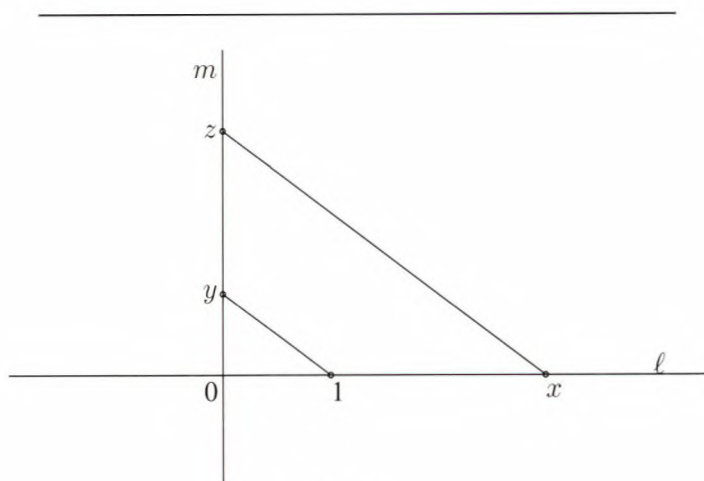
Vi afsætter på linealen to punkter, der har en foreskrevet indbyrdes afstand, altså samme afstand som den, der er mellem to givne eller allerede konstruerede

To ud af tre

tal. Desuden kan vi konstruere kvadratroden af et allerede opnået tal. Men det er også alt, hvad vi kan.

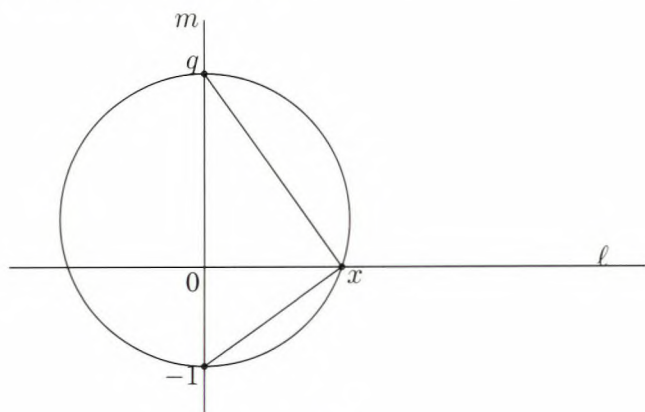


Figur 6



Figur 7

Da $x : 1 = z : y$, og vi kan finde x eller z , når de andre to er givet, kan vi altså finde produktet, $z = x \cdot y$, og kvotienten, $x = \frac{z}{y}$. Dertil kommer, at vi kan bestemme kvadratroden af et tal, q :



Figur 8

Vi tegner blot cirklen med diameter $1 + q$, så vil den vinkelrette på diameteren i skillepunktet skære cirklen i punktet $x = \sqrt{q}$.

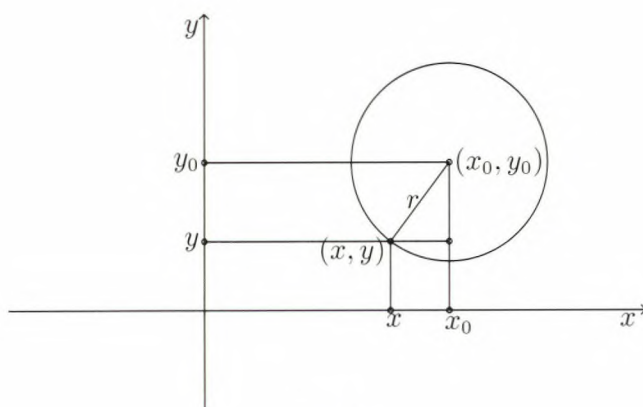
Det afgørende er imidlertid, at hermed er vore muligheder udtømt. En linie gennem to givne punkter med koordinater (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er givet ved ligningen:

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

Ligningens koefficienter findes altså ud fra punkternes koordinater ved almindelig regning med de 4 regningsarter. Skæringspunktet mellem to linier har koordinater, der findes ved at løse ligningerne. Også denne proces klares med de 4 regningsarter.

En cirkel karakteriseres ved, at punkterne har den konstruerbare afstand, r , til et konstrueret punkt, centrum, (x_0, y_0) . Ifølge Pythagoras bliver punkternes koordinater derfor karakteriseret ved ligningen:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Figur 9

Ligningens koefficienter indeholder kun konstruerbare tal. Skærer vi cirklen med en linie, skal vi løse to ligninger med to ubekendte, hvoraf den ene er af første mens den anden er af anden grad. Substitueres førstegradsligningen i andengradsligningen, skal vi blot løse en andengradsligning. Dette kræver præcis én udtagelse af en kvadratrode.

To cirklers skæring kræver ikke noget nyt. Differensen mellem ligningerne giver en førstegradsligning for en linie, der, hvis cirklerne skærer hinanden, går gennem skæringspunkterne. Vi klarer os derfor stadig med én kvadratrode.

Hver gang vi konstruerer ét nyt punkt, kan koordinaterne til dette findes ud fra de givne punkters koordinater ved hjælp af de 4 regningsarter og eventuelt én kvadratrode.

Tallegemer

En mængde af tal med den egenskab, at vi forbliver inden for mængden, når vi udfører de fire regningsarter, – på nær division med 0, – kaldes et *tallegeme*. For eksempel er mængden af rationale tal, $\mathbf{Q}$, et tallegeme. Hvis nu $\mathbf{L}$ er et tallegeme og $q \in \mathbf{L}$ et tal, så $x^2 = q$ ikke har nogen løsning, $x \in \mathbf{L}$, så er

$$\mathbf{L}(\sqrt{q}) = \{x + y\sqrt{q} \mid x, y \in \mathbf{L}\}$$

igen et tallegeme. Sum og differens får åbenbart samme form, og også produktet bliver

$$(x + y\sqrt{q})(u + v\sqrt{q}) = (xu + yvq) + (xv + yu)\sqrt{q}$$

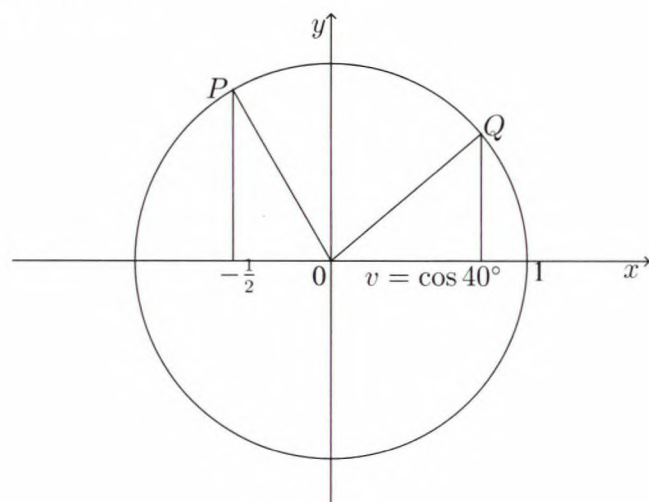
som igen har den ønskede form. Det spændende er, at man kan dividere, eller, at tallenes inverse har den ønskede form. Man finder:

$$\frac{1}{x + y\sqrt{q}} = \frac{x - y\sqrt{q}}{x^2 - y^2q}$$

som åbenbart har den ønskede form. (Nævneren kan aldrig blive nul, når q ikke er et kvadrat.)

Tallegemernes betydning for konstruktioner er, at har vi et sæt punkter med koordinater i et tallegeme $\mathbf{L}$, så vil koordinaterne til et konstrueret punkt enten ligge i $\mathbf{L}$ eller i $\mathbf{L}(\sqrt{q})$ for et eller andet $q \in \mathbf{L}$.

Starter vi konstruktionen med et par af punkter med rationale koordinater, vil en hvilken som helst konstruktion give et punkt, hvis koordinater ligger i et legeme, der er fremkommet ved endelig mange udvidelser med en kvadratrods.



Figur 10

Polynomiers division

Hvis vi har et tredjegradspolynomium med koefficienter i et tallegeme, $\mathbf{L}$, som har en rod $\alpha + \beta\sqrt{q}$ i det udvidede legeme, $\mathbf{L}(\sqrt{q})$, så har det også en rod i $\mathbf{L}$. Hvis polynomiet er

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

hvor $a, b, c \in \mathbf{L}$, og $\alpha + \beta\sqrt{q}$ er rod, så må jo

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2q + a\alpha^2 + a\beta^2q + b\alpha + c \\ + (3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta)\sqrt{q} = 0 \end{aligned}$$

hvorfor

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2q + a\alpha^2 + a\beta^2q + b\alpha + c &= \\ 3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta &= 0 \end{aligned}$$

Indsættes nu $\alpha - \beta\sqrt{q}$, ses det, at vi får

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2q + a\alpha^2 + a\beta^2q + b\alpha + c \\ - (3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta)\sqrt{q} = 0 - 0\sqrt{q} = 0 \end{aligned}$$

Der må derfor være en tredje rod i $\mathbf{L}(\sqrt{q})$, lad os sige $\gamma + \delta\sqrt{q}$. Altså er polynomiet, $p(x)$, produkt af 3 førstegradspolynomier, nemlig

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \alpha - \beta\sqrt{q})(x - \alpha + \beta\sqrt{q}) \\ &\quad (x - \gamma - \delta\sqrt{q}) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2q)(x - \gamma - \delta\sqrt{q}) \end{aligned}$$

Men da $p(x)$ har koefficienter i $\mathbf{L}$, kan det kun lade sig gøre, hvis $\delta = 0$, altså hvis $p(x)$ har roden $\gamma \in \mathbf{L}$.

En trigonometrisk formel

Lad os vende tilbage til figur 5, men tænke os, at vi har tegnet den i omvendt orden. Vi har altså tegnet linien n først, og derefter tredoblet vinkelen ϕ , så linien k danner vinkelen 3ϕ med ℓ . Så skærer n cirklen i punktet med koordinaterne $(\cos \phi, \sin \phi)$, mens punktet A har koordinaterne $(\cos 3\phi, \sin 3\phi)$. Når nu cirklen har radius 1, så er $CD = 2$. De ensvinklede trekanter giver derfor umiddelbart formlerne

$$\begin{aligned} \cos 3\phi &= OC \cdot \cos \phi \\ \sin 3\phi &= (OC + 2) \cdot \sin \phi \end{aligned}$$

hvoraf vi finder

$$\sin 3\phi = \left(\frac{\cos 3\phi}{\cos \phi} + 2 \right) \sin \phi$$

som kvadreret giver

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi \sin^2 3\phi &= \\ (\cos^2 3\phi + 4 \cos^2 \phi + 4 \cos 3\phi \cos \phi) \sin^2 \phi \end{aligned}$$

Sættes $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$, fås ved benyttelse af $\sin^2 3\phi + \cos^2 3\phi = 1$, at

$$\begin{aligned} \cos^2 3\phi - 4 \cos 3\phi (\cos^3 \phi - \cos \phi) \\ - 4 \cos^4 \phi + 3 \cos^3 \phi = 0 \end{aligned}$$

Denne lignings venstre side spaltes umiddelbart i et produkt, så vi får

$$(\cos 3\phi + \cos \phi)(\cos 3\phi - 4 \cos^3 \phi + 3 \cos \phi) = 0$$

Da den første faktor ikke kan være 0, får vi formelen

$$\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$$

En vinkel, der ikke kan tredeles

Vi påstår, at vinkelen $\psi = 120^\circ$ ikke kan tredeles. Med andre ord, at man ikke kan konstruere vinkelen 40° . Vinkelen ψ er karakteriseret ved, at $\cos \psi = -\frac{1}{2}$. Denne vinkel er altså umiddelbart konstruerbar, og koordinaterne til punktet kræver højst én kvadratrods, i dette tilfælde $\sqrt{3}$.

Lad os kalde $v = \cos 40^\circ$. Ifølge formelen for cosinus til den tredobbelte vinkel, er v rod i polynomiet

$$p(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$$

Ved konstruktionen af v har vi successivt tilføjet kvadratrødder til legemer. Lad det næstsidste legeme være $\mathbf{L}$, og det sidste $\mathbf{L}(\sqrt{q})$. Vi kan altså skrive v på formen $v = \alpha + \beta\sqrt{q}$, hvor vi har $\alpha, \beta \in \mathbf{L}$. Det må jo betyde, som vi har set ovenfor, at polynomiet også har en rod i $\mathbf{L}$.

Efter endelig mange gentagelser ender vi med, at polynomiet har en rod i $\mathbf{Q}$. Altså et rationalt tal, $\frac{m}{n}$, hvor m og n er uden fælles divisorer, der opfylder:

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\frac{m}{n} + \frac{1}{2} = 0$$

eller bedre endnu $8m^3 - 6mn^2 + n^3 = 0$. Her må n være divisor i 8 og m divisor i 3, så der er kun endelig mange muligheder, men en prøve viser, at ingen af dem faktisk er rødder. Der er ingen rationale rødder i $p(x)$.

Terningens fordobling

I forhold til vinklens tredeling er terningens fordobling barnemad. Vi skal jo finde $\sqrt[3]{2}$, altså en konstruktiv løsning til ligningen $x^3 = 2$. Men nøjagtig som ovenfor slutter vi, at hvis der er en rod i et eller andet konstruerbart legeme, så er der en rational rod. Men intet rationalt tal har trediepotensen 2.

I matematik er der ikke blot noget, man ikke kan, men også noget, man ikke kan kunne!

Referencer:

- 1) Jesper Lützen: *Cirkelns kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling*, Systime, Gjellerup, 1985.



Mogens Esrom Larsen redigerer matematikken i KVANT. Han er lektor ved Matematisk Institut på Københavns Universitet.



VAT Vakuumventile AG

Førende på verdensplan indenfor vakuumventiler

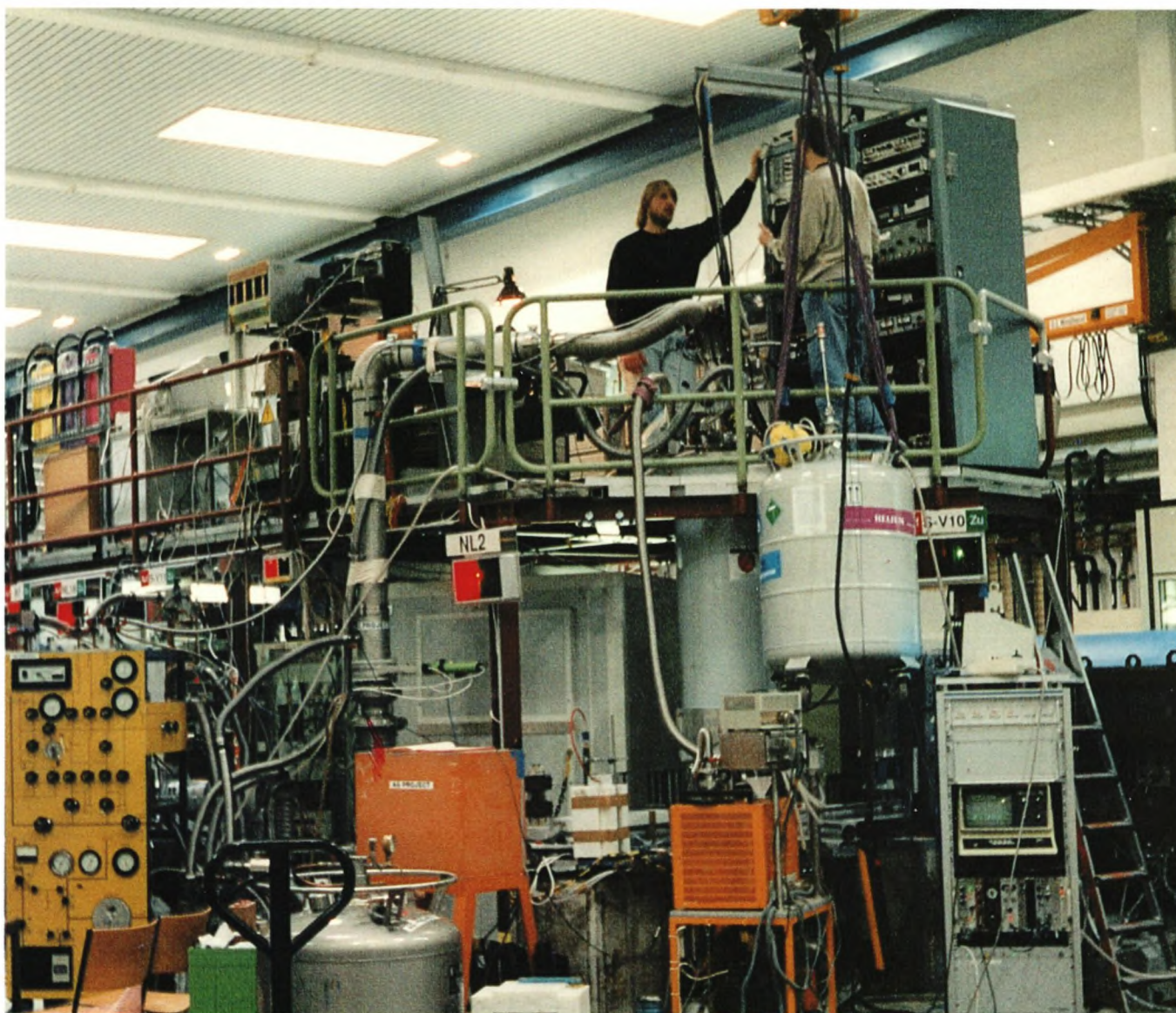


Ventiler, reguleringssystemer og bælge til høj- og ultrahøjvakuum

Størrelser fra DN 16 til DN 400
Certificeret ISO 9001

Repræsenteret af:

Balzers-Pfeiffer Scandinavia, tlf 39 68 32 61
Baunegårdsvej 7L, 2820 Gentofte



Abonnement på KVANT

koster 135 kr for en årgang og vil blive opkrævet pr. giro. Nye abonnenter vil modtage eventuelle tidligere numre af den løbende årgang. Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse vil modtage bladet som et medlemsblad.

Hvis du mener at du har abonnement, men ikke får bladet – har du nok glemt at melde flytning af bladet hos dit lokale postkontor, eller måske har du ikke betalt. Bemærk at flytning af KVANT skal meddeles postvæsenet eksplicit!

Abonnement tegnes ved at skrive til

Lene Körner, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø, e-mail: koerner@math.ku.dk