

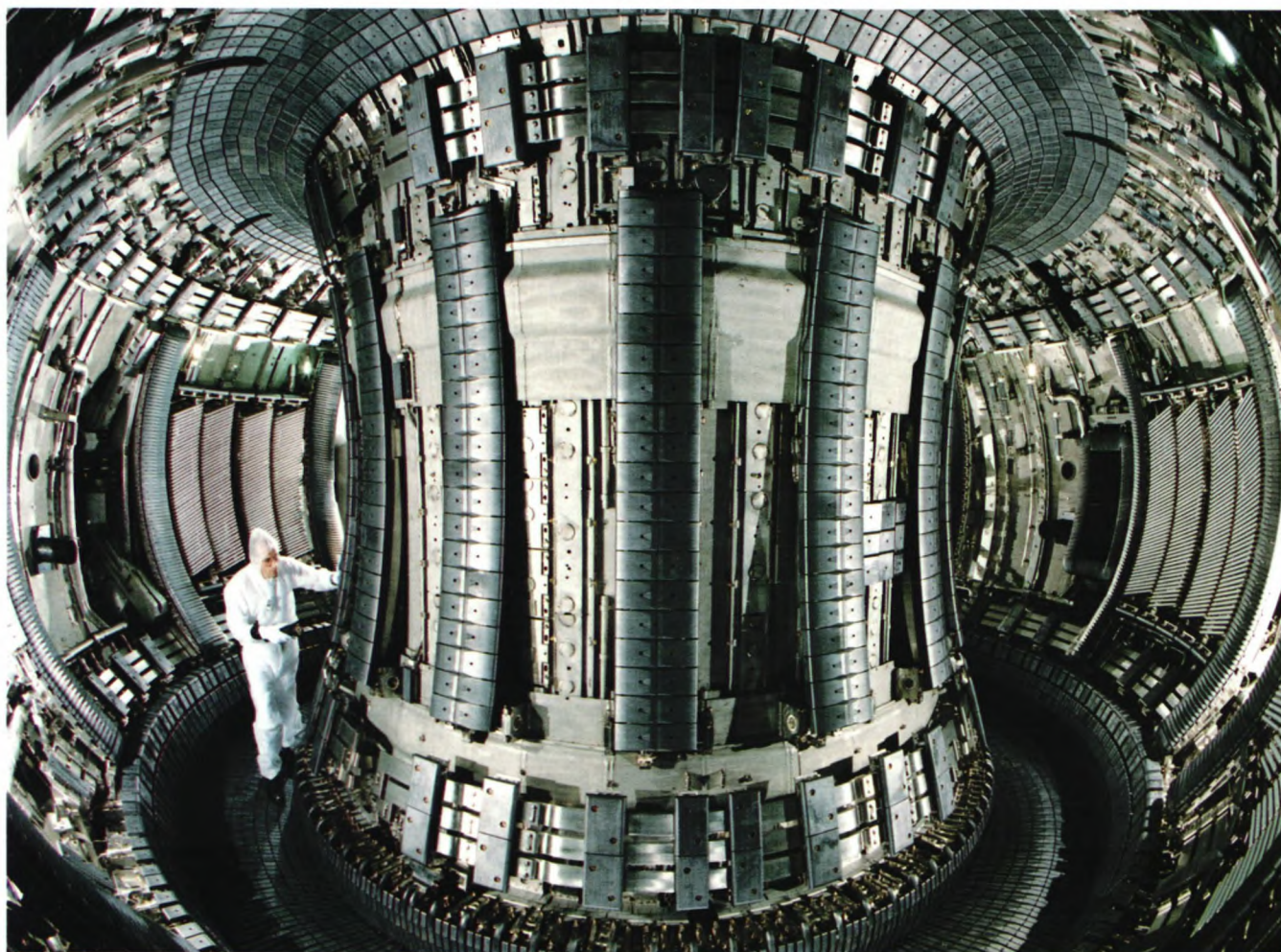
KVANT

Marts
1995

1

Fysisk Tidsskrift

6. årgang



• MAGNETFELTER • KORRESPONDENSPRINCIPPET • BERNOULLITAL OG INTEGRATION •

LØSSALGSPRIS: 35 KR

KVANT

Fysisk Tidsskrift

c/o Ørsted Laboratoriet
Niels Bohr Institutet
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø

Telefax : 35 32 04 60
E-mail : kvant@nbivax.nbi.dk
Giro : 5 84 31 46

Udgives af

Dansk
Fysisk
Selskab



Selskabet for
Naturlærens
Udbredelse



Redaktion

Mads Hammerich (ansv.)
Rungsted Gymnasium
Jørgen Friis Bak
Naturvidenskabeligt fakultet, ÅU
Jørn Christiansen
Torsten Freltoft (annoncer)
NKT Research Centre
Mogens Esrom Larsen
Matematisk Institut, KU
Finn Berg Rasmussen
Ørsted Laboratoriet, KU
Ove Østergaard
Silkeborg Amtsgymnasium

KVANT udkommer 4 gange årligt og er medlemsblad for de udgivende selskaber.
Abonnementspris: 135 kr/år (i Danmark).

Annoncepriser

1/1 side	3000 kr
1/2 side	1600 kr
1/4 side	1000 kr
Farvetillæg	1800 kr

Priserne er excl. moms og gælder for reprojekteret materiale. Henvendelser om annoncer til Torsten Freltoft, NKT Research Centre, telefon 43 48 35 69, telefax 43 63 00 99.

Oplag: 2000

Tryk: P.J.Schmidt, Vojens
ISSN 0905-8893

Indhold:

Magnetfelter er spændingstilstande i rummet

Vagn O. Jensen 1

Jensen beskriver magnetfelter som media der formidler kræfter mellem strømførende legemer ved hjælp af træk-, tryk- og forskydningsspændinger. Dermed er magnetfelter den elektiske analog til bjælker og gasser i mekanikken

Korrespondensprincipets diskrete charme

Ove Nathan 11

Korrespondensen mellem kvantik og klassisk mekanik er en af betingelserne for fysikeres relative sjælssundhed. Men er det virkelig sådan, at elektroner, der er eksiterede til randen af ionisering, bevæger sig i simple Kepler-lignende baner? Først nu er det blevet muligt at undersøge. Og svaret er ja — overfladisk set, men ikke så simple.

Dank Fysisk Selskabs årsmøde

DFS 13

Her er blanketterne du skal bruge for at komme til årsmødet.

Fra Bernoullis forunderlige polynomier og tal

via Euler–Maclaurins sumformel til Rombergs integralapproximation
- Anden del.

Mogens Esrom Larsen 20

Bag den forunderlige titel gemmer sig en historie der via Bernoullitalallene fører frem til simple måder løse noget så svært som at udregne π med mange decimaler.

Anden og sidste del, hvori man i 10 iterationer bestemmer π med 9 betydende cifre, bringes her. Hav papir og blyant parat!

SORØ - dage 1995

Nils O. Andersen 23

Forsiden:

JET - Joint European Torus. Her ses det indre af kammeret hvor plasmaet holdes indespærret ved hjælp af magnetfelter i den såkaldte tokamak - konfiguration. De lange strukturer på midtersøjlen og de vandret finnedes strukturer i ydervæggen er såkaldte 'limiters' der forhindrer plasmaet i at nå, og blive ødelagt af væggene. De skråt finnedes strukturer er VHFantennener til opvarmning af plasmaet. Når teknikeren har forladt kammeret og forsøget er igang, er temperaturen 100 mill. grader, plasmatætheden 10^{20} m^{-3} , partikeltrykket cirka en atmosfære og det magnetiske tryk 10 atm.

Bagsiden:

JET - reaktoren skåret op.

Magnetfelter er spændingstilstande i rummet

Vagn O. Jensen

Lige siden H.C. Ørsted i 1820 opdagede sammenhængen mellem magnetisme og elektriske strømme, har man diskuteret, hvordan magnetfelter bedst kan opfattes. Kilderne, der genererer et magnetfelt, $\mathbf{B}$, er strømme i elektriske ledere (i et magnetiserbart materiale, som f.eks. en permanent magnet, dannes strømmene ved en ensretning af strømsløjferne i de enkelte atomer). Et $\mathbf{B}$ -felt tilskrives en styrke, som kan måles på forskellige måder, f.eks. benyttes i tidligere tider frekvensen af en kompasnåls svingning i et magnetfelt som et mål for feltstyrken. Mere nøjagtige målinger opnås nu ved at bestemme kraftpåvirkning på en strømførende leder i feltet eller afbøjningen af en ladet partikel, der bevæger sig i feltet. De nævnte metoder er alle baseret på en kraftpåvirkning på målesonderne, og reaktionen på disse kræfter virker tilbage på strømlederne, der genererer magnetfeltet. Et magnetfelt kan altså opfattes som et medium, som transmitterer kræfter mellem strømførende legemer. Sådanne legemer kan frastøde hinanden, tiltrække hinanden og endog dreje hinanden. Det er disse egenskaber, der udnyttes i elektromagnetiske apparater, som motorer, generatorer, drejespoleinstrumenter o.m.a.

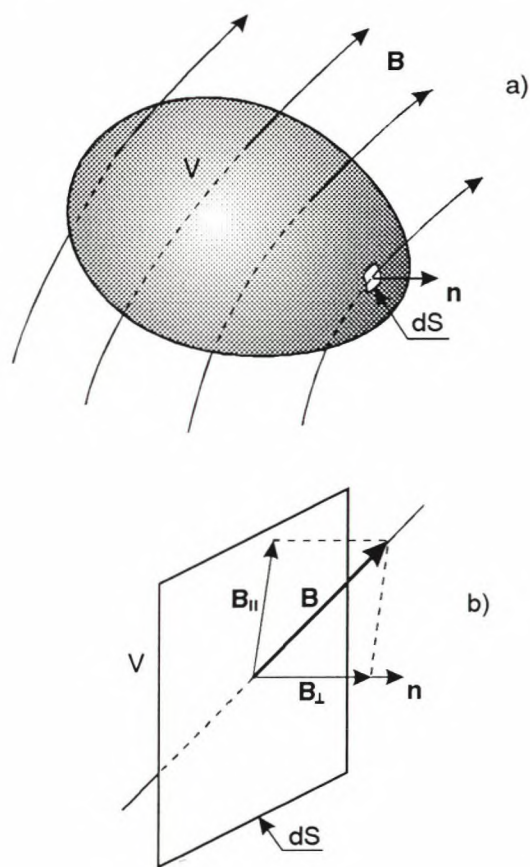
Et magnetfelt kan også opfattes som bærer af en rumlig energitæthed. Til strømledere, der genererer magnetfelter, er der altid knyttet en selvinduktion L , og det koster en energimængde $\frac{1}{2} LI^2$ at etablere en strøm I i disse ledere. Denne energimængde kan opfattes som fordelt i magnetfeltet omkring lederen med en energitæthed $B^2(\mathbf{r})/2\mu_0$.

I denne artikel ser vi på tidsuafhængige magnetfelter og viser, at de kan fortolkes som simple spændingstilstande i rummet, der overfører kræfter mellem forskellige områder. De magnetiske kræfter, der påvirker et vilkårligt valgt volumen i et magnetfelt, kan opfattes som spændinger, der alene påvirker volumenets overflade. Situationen er analog til bjælker og andre bygningselementer, som transmitterer kræfter, ved at der opstår træk-, tryk- og forskydningsspændinger i dem, eller til en almindelig gas, som via det isotrope tryk transmitterer trykkræfter fra den ene væg til den anden. Med denne fortolkning af et magnetfelt får vi et grundlag for en simpel fysisk forståelse af magnetfelters egenskaber, som kan lette vor opfattelse af magnetiske kræfters virkemåde.

Vi udleder og diskuterer først de magnetiske spændinger for vakuumfelter, dvs. felter i områder, hvor der ikke kan flyde elektriske strømme. Som eksempler på brugen af disse spændinger udleder vi derefter nogle allerede kendte egenskaber ved vakuumfelter og viser, at spændingerne kan forklare tiltrækningen og frastødningen mellem elektriske ledere og mellem permanente magneter. Magnetiske spændinger er af særlig interesse inden for plasmafysikken. Det skyldes, at mange plasmaegenskaber kan forklares ved brug af de magnetiske spændinger

i kombination med plasmaets partikeltryk. En udledning af dette præsenteres, og resultaterne bruges derefter til at forklare nogle simple problemer inden for plasmafysik og fusionsforskning.

I hovedteksten gives en bred og ret elementær diskussion af stoffet illustreret med figurer, men med kun få og simple formler. Det er tilstræbt, at hovedteksten skal kunne læses alene og give et godt indtryk af magnetiske spændinger og deres brug. Læsere med interesse for at gå mere i dybden og følge de matematiske udledninger kan finde disse i boksen. En mere omfattende analyse af magnetiske spændinger og deres brug kan findes i [1].



Spændingsart	Størrelse	Retning
Forskydning	$B_{\parallel} B_{\perp} / \mu_0$	$(\mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel}) \times \mathbf{n}$
Træk	$B_{\perp}^2 / \mu_0$	$\mathbf{n}$
Tryk	$B^2 / 2\mu_0$	$-\mathbf{n}$
(Partikeltryk)	p	$-\mathbf{n}$

Figur 1. Magnetiske spændinger.

Magnetiske spændinger i vakuumfelter

Maxwell-ligningerne er grundligningerne for en behand-

ling af alle elektromagnetiske fænomener, også af vore magnetiske spændinger. For stationære $\mathbf{B}$ -felter, som vi betragter, tager ligningerne formen (A.1) og (A.2) i boksen. Analysen under A) fører til resultatet i (A.9). Den fysiske fortolkning af denne ligning er følgende: Betragt et område i et magnetfelt, hvor der ikke løber elektriske strømme, som skitseret på fig. 1a). Magnetfeltet er altså genereret af strømme uden for det betragtede område. Ind i dette område lægges et volumen, V , med vilkårlig valgt form. V 's overflade kaldes S , og dS er et infinitesimalt element af denne. $\mathbf{n}$ er en udadrettet enhedsvektor, som står vinkelret på dS -fladen; $\mathbf{n}$ ændrer altså retning, når

vi bevæger os rundt på S . Den overordnede fortolkning af (A.9) er, at V påvirkes af spændinger, der transmitterer kræfter gennem overfladen, og at den samlede resulterende kraft på V er nul. En mere detaljeret fortolkning af (A.9) giver størrelse og retning af de magnetiske spændinger, der transmitteres gennem S .

På fig. 1b) vises dS fra 1a) i forstørret målestok. $\mathbf{B}$ -feltet i dS har normalkomponenten $\mathbf{B}_\perp$ (parallel med $\mathbf{n}$) og komponenten $\mathbf{B}_\parallel$ parallel med dS -fladen. Integranten i første led på højre side af (A.9) viser, at $\mathbf{B}$ -feltet påvirker dS med en trækspænding langs magnetfeltlinien og altid i retningen ud fra V .

Boks

Udledning af magnetiske spændinger

De tidsuafhængige Maxwell-ligninger for et $\mathbf{B}$ -felt er

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} \quad (\text{A.1})$$

og

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Krydsproduktet af (A.1) med $\mathbf{B}$ giver

$$\mathbf{f} \equiv \frac{1}{\mu_o} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.3})$$

Da $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ er Lorentzkraften på en volumenenhed med strømtætheden $\mathbf{j}$, har (A.3) dimensionen krafttæthed (N/m^3), og må derfor opfattes på den måde, at når man vælger et volumenelement, dV , så er $\mathbf{f}dV$ den magnetiske kraft, der påvirker dV . I det følgende udleder vi først under A) de magnetiske spændinger for vakuumområder og derefter under B) for plasmaer.

A) Magnetiske spændinger i strømfri vakuumområder

For strømfri områder, hvor $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$, bliver (A.3)

$$\mathbf{f}_{vak} \equiv \frac{1}{\mu_o} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.4})$$

som viser, at den magnetiske kraft $\mathbf{f}_{vak}dV$, på et volumenelement i et strømfrit område er lig 0. Dette er naturligt, da vi jo ser på stationære situationer.

Den fra vektoranalysen kendte identitet

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \equiv -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \nabla \frac{B^2}{2} \quad (\text{A.5})$$

fører med (A.2) til at (A.4) kan skrives

$$\mathbf{f}_{vak} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_o} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_o} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Den samlede magnetiske kraft, $\mathbf{F}_{vak}$, på et endeligt volumen, V , der er placeret i feltet, fås ved at integrere (A.6) over V . De to led, der skal integreres, er henholdsvis divergensen af tensorfunktionen $\mathbf{B}\mathbf{B}/\mu_o$ og gradienten af skalarfunktionen $B^2/2\mu_o$. Bemærk at begge disse funktioner har dimensionen energitæthed (J/m^3), hvilket er det samme som dimensionen for tryk og spændinger (N/m^2). For begge de to led i (A.6) gælder det specielle, at deres integraler over et volumen, V , kan erstattes af integrationer over V 's overflade. Dette udtrykkes matematisk ved Green's formel for skalarfunktionen $\phi(\mathbf{r})$

$$\int_V \nabla \phi dV \equiv \int_S \phi \mathbf{n} dS \quad (\text{A.7})$$

og den tilsvarende for tensorfunktionen $T(\mathbf{r})$

$$\int_V \nabla \cdot T dV \equiv \int_S \mathbf{n} dS \cdot T, \quad (\text{A.8})$$

hvor dV er et infinitesimalt element af V , S er V 's samlede overflade, og $\mathbf{n}$ er en udadrettet enhedsvektor i dS . Vi finder

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{vak} &= \int_V \mathbf{f}_{vak} dV \\ &= \int_S \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{\mu_o} dS - \int_S \frac{B^2}{2\mu_o} \mathbf{n} dS \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En geometrisk fortolkning af integranterne i (A.9) i form af træk-, tryk- og forskydningspændinger er vist på fig. 1 og diskuteret i hovedteksten. Det skal dog her bemærkes, at det er selve feltets værdi, der indgår i integralerne i (A.9) og ikke de afledede af feltet, som optræder i grundligningerne (A.1) og (A.2).

FRA VORT STORE PROGRAM

VARIAN

Turbopumper
Ionpumper
Oliediffusionspumper
Læksøgere
Vacuum måleudstyr
UHV & HV fittings

DCA Instruments

Fremstilling af UHV anlæg til:
Sputterprocesser
MBE
Tyndfilm deponering
Overfladeanalyse
samt kundespecificeret UHV kamre

Lake Shore Cryotronics

Lavtemperatur kontrollere
& sensorer
Elektromagneter & strømforsyninger
Gaussmetre & Hall elementer
VSM (vibrating sample magnetometer)
AC/DC magnetometer - susceptometer

Oxford Applied Research

Reaktive atomkilder
Mini E-beams
Quartz micro vægte
Ioniserede doping
K-celler
Substratholdere i
UHV udførelse
Rheed Guns
Magnetronkilder
Ion cleaning Guns
Fokuserende
elektronkilder
Scanning Ionkilder

Leda - Mass

Quadrupoler / RGA
Windowsbaseret software
Specielt design til
sputterprocesser
ion implantering
tyndfilm
optisk coating
acceleratorer
overfladeanalyse m.m.

APD cryogenics

Close cycle kryostater ned til 6,5 °K
Open cycle kryostater ned til 2 °K
Cryotiger fra 80 °K til 120 °K
Kryopumper

AAGE CHRISTENSEN A/S

Skelmosevej 10, DK-2500 Valby Tlf. 36 44 24 44 Fax 36 44 20 24



BORAELECTRIC™

Substrate heaters for High- and Ultra High Vacuum, made from Pyrolytic Boron Nitride (PBN) and Pyrolytic Graphite (PG). Operating range from 20°C to 2000°C

Boralelectric Heating Elements are manufactured by CVD processing and are widely used in Surface Science, Thin Film Deposition and Metallurgical applications.

Standard sizes and shapes are available from stock. Custom designs are made on request.

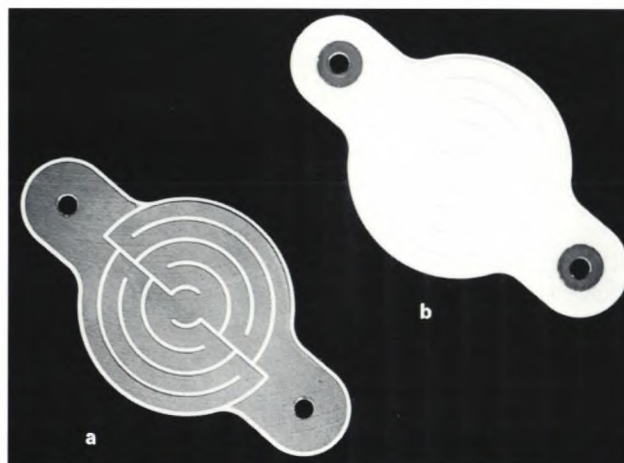
Call us for more information on your specific application.

crysis technology ab

Science Park Ideon, S-223 70 Lund, Sweden

Tel: +46 46182300

Fax: +46 46168975



Two versions of a standard 25mm heater

a) PG-pattern on PBN-base

b) PG-pattern on PBN-base and top coating with PBN

COMPONENTS
SELECT CAPABILITY:
VG MICROTECH
ANGLE RESOLVED ANALYSIS
VACUUM GENERATORS
VG QUADRUPOLES

Choose the Best Angle to Resolve the Problem

ARUPS 10 Angle Resolved Hemispherical Analyser

ARUPS 10 is a 75mm Hemispherical Analyser mounted on a Goniometer platform. A unique double axis rotation system and a specially designed lens ensure optimal angle definition and sensitivity. The ultimate resolution of <10meV enables UV analysis of gases and LEELS studies to be made.



The VG range includes 'Bolt-On' Components such as Electron Spectrometers, X-ray Sources, Electron Guns, LEED/Auger optics, RHEED guns/screens, Ion Guns and SIMS Quadrupoles for multi-technique analysis such as XPS, UPS, AES and ISS.

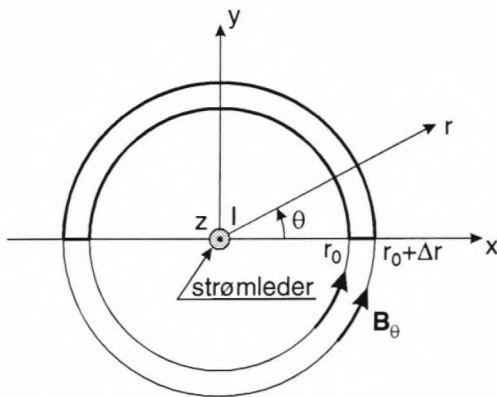
VG MICROTECH

FISONS

Instruments

*Fisons Instruments Nordic AB
Box 1176
S-171 23 SOLNA
Sweden
Tel : +46 08 730 02 95
Fax : +46 08 730 42 42*

Den opdeles i en forskydningsspænding af størrelsen $B_{\parallel}B_{\perp}/\mu_o$, som peger i retningen af trækspændingens projektion på dS og i en trækspænding $B_{\perp}^2/\mu_o$, som peger vinkelret ud fra dS i $\mathbf{n}$'s positive retning. Bemærk at begge de nævnte spændinger forbliver uændret ved en 180° vending af magnetfeltets retning. Integranten i sidste led i (A.9) viser, at $\mathbf{B}$ -feltet også påvirker dS med en indadrettet trykspænding, $B^2/2\mu_o$. Denne trykspænding, der altid virker vinkelret på dS , svarer helt til trykket i en isotrop gas, der jo også virker vinkelret paa væggen. Kræfterne, der transmitteres gennem dS til V , er så de nævnte spændinger ganget med dS . Nederst på fig. 1 er de forskellige spændinger angivet både med størrelse og retning.

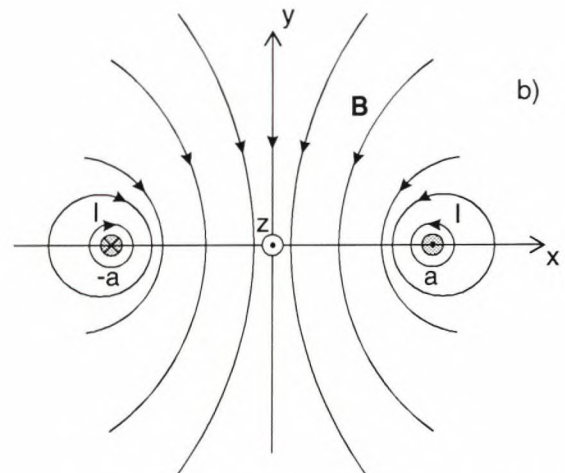
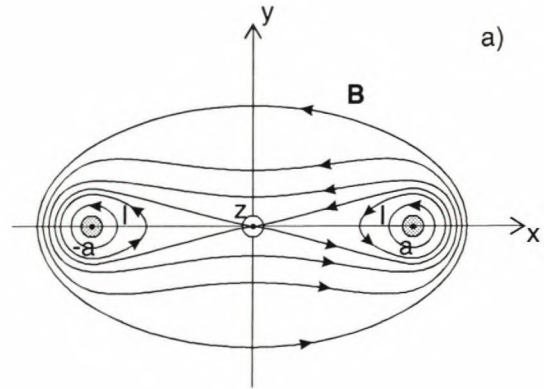


Figur 2. Summen af magnetiske kræfter på feltlinierør i vakuumfeltet omkring ret leder er nul.

Ved brug af de magnetiske spændinger til aktuelle beregninger er man ofte fri i sit valg af formen af det volumen, V , man betragter. Det fremgår af fig. 1, at hvis man vælger V med form som et feltlinierør med endeflader, der står vinkelret på feltlinierne, så bliver beregningerne simple. På et sådant rørs sideflader er $B_{\perp} = 0$, og de på virkes derfor kun med det isotrope tryk $B^2/2\mu_o$ vinkelret indad mod dS -fladen. På endefladerne er $B_{\parallel} = 0$, og de på virkes derfor med en udadrettet trækspænding B^2/μ_o og med en indadrettet trykspænding $B^2/2\mu_o$. Disse to spændinger resulterer i en udadrettet trækspænding med styrken $B^2/2\mu_o$. Et magnetfelt kan altså opfattes som et medium, hvori der hersker en trækspænding, $B^2/2\mu_o$, langs feltlinierne og en trykspænding, også $B^2/2\mu_o$, vinkelret paa feltlinierne.

Som eksempel på brugen af magnetiske spændinger er det let at vise, at feltet omkring en lang, retlinet leder med strømmen I opfylder betingelsen om, at den resulterende kraft på et volumen i feltet er nul. På fig. 2 er lederen sammenfaldende med z -aksen. Magnetfeltet består af koncentriske cirkler med centrum i z -aksen. Feltstyrken er $B_{\theta}(r) = \mu_o I/2\pi r$. Som volumen vælger vi et feltlinierør som vist kraftigt optrukket på figuren. Det er en halv cylinderskal med indre radius r_o og ydre radius $r_o + \Delta r$. Det har længden L i z -retningen, og

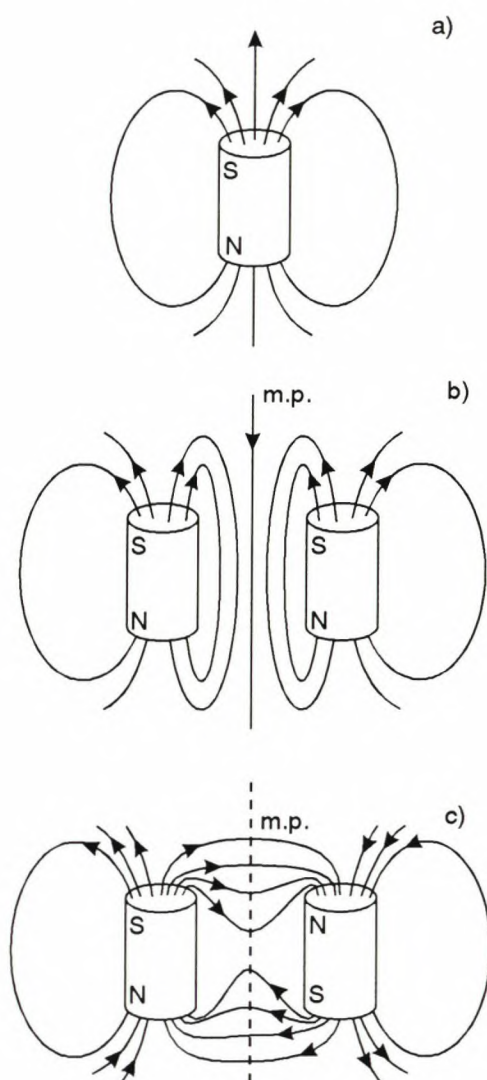
det strækker sig fra $\Theta = 0$ til $\Theta = \pi$, dvs. dens endeflader ligger i xz -planen. Vi ser på y -komponenterne af de magnetiske kræfter, der påvirker cylinderskallen. På indersiden af skallen er feltstyrken $B_{\theta}(r_o)$, og det tilsvarende isotrope magnetfelttryk påvirker skallen i den positive y -retning med kraften $2r_o L B_{\theta}^2(r_o)/2\mu_o$. På ydersiden er feltstyrken $B_{\theta}(r_o + \Delta r)$, og det påvirker tilsvarende skallen i den negative y -retning med kraften $2(r_o + \Delta r)L B_{\theta}^2(r_o + \Delta r)/2\mu_o$. Endelig påvirkes endefladerne med trækspændingen $B_{\theta}^2(r)/2\mu_o$ også i den negative y -retning. Det er nu let at vise, at netop med B_{θ} -feltets r^{-1} -afhængighed er summen af de tre magnetiske spændingskræfter lig nul.



Figur 3. Magnetiske kræfter mellem rette, parallelle ledere med a) parallelle strømme og b) antiparallelle strømme.

I det foregående har vi kun set på strømfri volumener og vist, at de magnetiske spændinger ikke yder nogen resulterende kraft på sådanne volumener. Vi vil nu også se på volumener, hvori der løber strømme; det kan være lukkede strømsløjfer inden for det betragtede volumen eller strømme, der løber gennem disse volumener. Som før repræsenterer de magnetiske spændinger på et sådant volumens overflade den kraft, der transmitteres

gennem en arealenhed af overfladen ind i volumen. Integralet over hele overfladen af disse spændinger er derfor den resulterende kraft på volumenet, og den overføres til strømlederne via feltet mellem lederne og overfladen. Hvis lederne ikke holdes mekanisk fast, vil de bevæge sig. Denne effekt bruges f.eks. i elektromotorer og i elektriske drejespoleinstrumenter.



Figur 4. Magnetiske kræfter mellem permanente stangmagneter b) parallelle, c) antiparallelle.

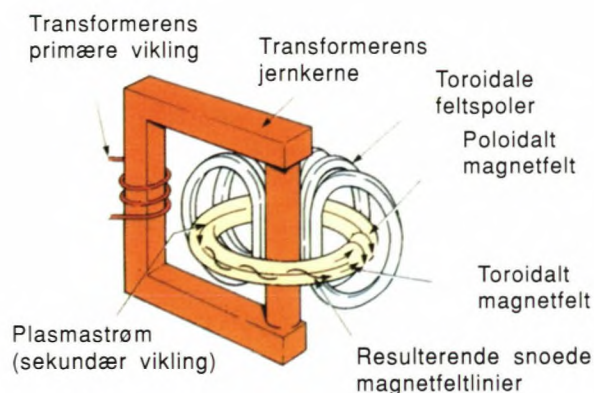
Lad os som eksempel beregne kraften pr. længdeenhed mellem to retlinede strømførende ledere som vist på fig. 3. Lederne er parallelle med z-aksen, og de skærer xy-planen i $(a,0)$ og $(-a,0)$. Afstanden mellem dem er altså $d = 2a$. Hvis strømmen i begge ledere løber i z-retningen, ser feltet ud som skitseret på fig. 3a). Da feltlinierne overalt står vinkelret på yz-planen, transmitteres der kun trækkræfter gennem denne plan, dvs. de to ledere tiltrækker hinanden. Hvis strømmene i de to ledere er antiparallelle, ser feltet ud som skitseret på fig. 3b). I yz-planen er feltet nu overalt parallelt med denne plan, og der transmitteres derfor kun trykspændinger gennem planen. De to ledere vil derfor

frastøde hinanden. I begge tilfælde er kraftens numeriske værdi

$$K = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}. \quad (1)$$

Interesserede læsere inviteres til at verificere dette resultat ved brug af de fundne udtryk for magnetiske træk- og trykspændinger. Det er værd at minde om, at (1) bruges som definition af enheden ampere for strømstyrke, idet: "En ampere er defineret som strømstyrken af en konstant elektrisk strøm, der - når den løber i to parallelle, uendeligt lange ledere med forsvindende lille cirkulært tværsnit, som har en indbyrdes afstand på 1 meter og er anbragt i det tomme rum - bevirker at den ene leder påvirker den anden med kraften $2 \cdot 10^{-7}$ newton for hver meter". (Husk at $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

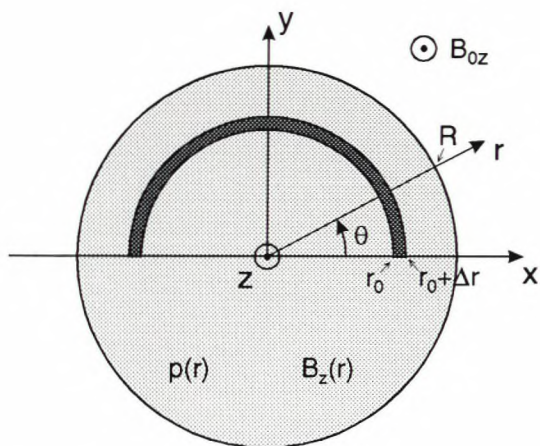
Vekselvirkningen mellem permanente magneter kan også let forstås ud fra magnetiske spændinger. Feltet omkring en aksialt magnetiseret stangmagnet forløber som antydnet på fig. 4a). Placeres sådanne to magneter parallelt ved siden af hinanden, forløber feltet som i fig. 4b). I midtplanen, *m.p.*, er feltlinierne parallelle med denne plan. Magnetfeltet overfører derfor et isotropt tryk gennem denne plan; det overføres til magneterne, som derfor frastøder hinanden. Placeres magneterne derimod antiparallelt ved siden af hinanden som i fig. 4c), får feltliniebilledet det viste udseende. Alle feltlinierne står nu vinkelret på midtplanen, og der transmitteres derfor en trækspænding gennem denne plan; den overføres til magneterne, som derfor tiltrækker hinanden.



Figur 5. Tokamakprincippet. Plasmaet ligger som en lukket ring i toruskammeret, som ikke er vist. En række toroidale feltspoler genererer et toroidalt magnetfelt, hvis feltlinier løber "den lange vej" rundt langs plasmaringen. Plasmaringen udgør sekundærviklingen på en transformer, som genererer en plasmastrom rundt i ringen. Plasmastrommen genererer et toroidalt magnetfelt, hvis feltlinier løber "den korte vej" rundt om plasmaringen. Kombinationen af de to magnetfelter er et resulterende felt, hvis feltlinier snor sig rundt om plasmaringen. Dette felt er grundlaget for tokamakens gode plasmaindslutningsegenskaber.

Magnetiske spændinger og partikeltryk i plasmaer

I det foregående har vi betragtet magnetiske spændinger i vakuumområder og vist, at de kan benyttes til at udlede

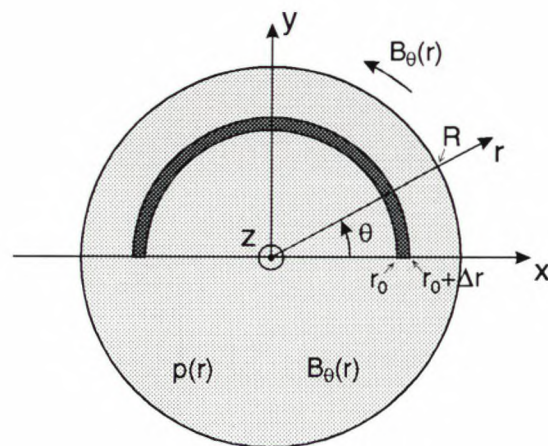


Figur 6. Trykbalance i Θ -pinchen.

udtryk for felter og kraftpåvirkninger mellem ledere. Magnetiske spændinger bliver imidlertid først virkelig brugbare inden for fusionsplasmafysikken, hvor det viser sig, at de kan simplificere mange beregninger og lette den fysiske forståelse af fænomenerne. I dette afsnit ser vi på spændinger i magnetiserede plasmaer. Hovedformålet er ved hjælp af disse spændinger at give en simpel fysisk forklaring på, hvordan et plasma kan holdes indesluttet i en tokamak. Tokamakken er den magnetfeltkonfiguration som hidtil har vist sig bedst egnet til at holde et fusionsplasma indesluttet, og det bliver sandsynligvis den konfiguration, der vil blive benyttet i de første fusionskraftværker. Tokamakens princip er vist skematisk på fig. 5. Før vi behandler selve tokamakkonfigurationen, viser vi nogle eksempler, der er nyttige for forståelsen.

En beregning af spændingstilstandene i et magnetiseret plasma er gennemført under B) i boksen. Maxwell-ligningerne (A.1) og (A.2) er igen grundligningerne, men i modsætning til vakuumtilfældet under A) kan der i et plasma løbe elektriske strømme. Relationen mellem strømmen, magnetfeltet og plasmatrykket, $p(r)$, er givet ved (A.10). Analysen under B) i boksen fører til resultatet (A.13). Den fysiske fortolkning af denne ligning er meget lig fortolkningen af det tilsvarende udtryk (A.9) for vakuumtilfældet. Hvis vi igen ser på fig. 1 er den eneste forskel, at dS ud over de samme magnetiske spændinger nu også påvirkes indad af plasmaets partikeltryk, som altså blot skal adderes til det isotrope magnetfelttryk $B^2/2\mu_0$. Dette partikeltryk er angivet nederst i listen på fig. 1, men i parentes, da det jo kun optræder, når vi betragter et plasmatilfælde.

I nogle eksempler viser vi nu, hvordan man ved hjælp af de fundne magnetiske spændinger kan beregne ligevægtsbetingelser for magnetisk indesluttet plasmaer. Vi vælger igen at betragte volumener med form som magnetfeltlinierør og med passende symmetriegenskaber og udnytter, at summen af alle spændingskræfter, partikeltrykket inkluderet, skal være nul.



Figur 7. Trykbalance i Z -pinchen.

Plasma i homogent magnetfelt (Θ -pinch)

Vi betragter en lang, cylindrisk plasmasøjle, som er indesluttet i et på trykt homogent magnetfelt, B_{0z} . Søjleaksen og magnetfeltet er parallel med z -retningen, se fig. 6. Søjleens radius er R . Vi antager, at problemet er symmetrisk omkring z -aksen, således at plasmatrykket, $p(r)$, og magnetfeltet, $B_z(r)$, kun afhænger af r . Vi vælger at se på et volumen af form som en halv cylinderskal beliggende i den positive y -halvplan og med indre radius, r_0 , og ydre ($r_0 + \Delta r$), som vist skyggelagt på fig. 6. Længden i z -retningen er L . Vi ser på y -komponenten af de kræfter, der påvirker skallen. Hverken de magnetiske trækkræfter eller partikeltrykkrafterne på skallens endeflader ved $z = 0$ og $z = L$ har komponenter i y -retningen. Alle vægge i skallen, der er parallelle med z -aksen, påvirkes af de to isotrope tryk, $B_z^2(r)/2\mu_0$ og $p(r)$. Skallen kan kun være i ligevægt, hvis summen af disse tryk overalt er den samme. Betingelsen for ligevægt er altså

$$p(r) + B_z^2(r)/2\mu_0 = \text{konst.} = B_{0z}^2/2\mu_0, \quad (2)$$

hvilket viser, at $B_z(r) \leq B_{0z}$. Man siger, at plasmaet er diamagnetisk. Der må cirkulere nogle strømme i plasmaet, som delvis afskærmer det ydre magnetfelt. I dette simple tilfælde med rette magnetfeltlinier svækker plasmaet magnetfeltet lige præcis så meget, at summen af magnetfelttrykket og partikeltrykket overalt er lig magnetfelttrykket uden for plasmaet. Den konfiguration, vi har betragtet, kaldes en Θ -pinch, fordi de diamagnetiske strømme løber i Θ -retningen.

Ret strømførende plasmasøjle i selvgenereret magnetfelt (Z -pinch)

Vi betragter en ret, cirkulær plasmasøjle, der holdes indesluttet i et magnetfelt, $B_\theta(r)$, som er genereret af en aksial strøm, I_p , i plasmaet. Feltlinierne løber altså

rundt om plasmasøjlen som vist på fig. 7. Søjle's radius er igen R , og den antages at være symmetrisk omkring z -aksen, således at plasmatrikket, $p(r)$, og magnetfeltstyrken, $B_\Theta(r)$ kun afhænger af r .

B) Magnetiske spændinger i plasmaer

Et stationært plasma, der er indesluttet i et magnetfelt, beskrives ved (A.1), (A.2) og

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (\text{A.10})$$

Sammenhængen mellem plasmastrømtætheden $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ og partikeltrykket $p(\mathbf{r})$ i (A.10) er let at fortolke. Lad os forestille os, at plasmatrikket har en gradient. Et volumenelement i plasmaet vil så påvirkes af en trykkraft, der er proportional med ∇p og pegende i $-\nabla p$ -retningen. Plasmaet kan kun være stationært, hvis der kan kompenseres for denne kraft. Som det fremgår af (A.10) kompenserer Lorentz-kraften $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ netop for trykkraften. Bemærk, at da $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ står vinkelret på $\mathbf{B}$, kan Lorentz-kraften ikke kompensere for ∇p -kræfter parallelt med magnetfeltlinierne. I et stationært plasma er plasmatrikket derfor konstant langs en feltlinie.

Elimination af $\mathbf{j}$ i (A.1) og (A.10) giver

$$\mathbf{f}_{pl} \equiv \frac{1}{\mu_o} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p = 0, \quad (\text{A.11})$$

der ved brug af (A.5) kan skrives

$$\mathbf{f}_{pl} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_o} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_o} - \nabla p = 0. \quad (\text{A.12})$$

Integration af (A.12) over et volumen V giver i analogi med udledningen af (A.9) følgende udtryk for de resulterende spændings- og trykkræfter på V

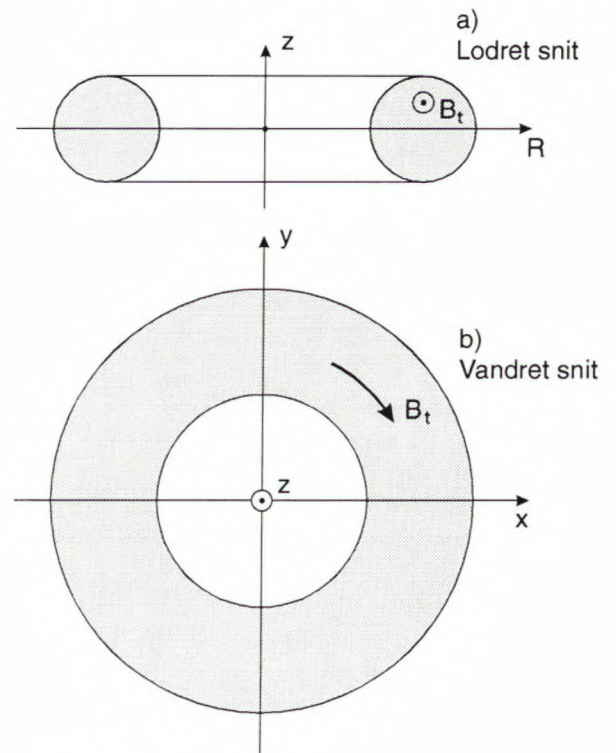
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{pl} &= \int_V \mathbf{f}_{pl} dV \\ &= \int_S \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{\mu_o} dS - \int_S \left(\frac{B^2}{2\mu_o} + p \right) \mathbf{n} dS \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Bemærk at udtrykket (A.13) for $\mathbf{F}_{pl}$ kun afviger fra (A.9) ved, at plasmatrikket p adderes til magnetfelttrykket $B^2/2\mu_o$ i integranten i sidste led i (A.13). Den geometriske fortolkning for plasmatilfældet er derfor den samme som for vakuumtilfældet blot skal plasmatrikket nu tages med (se fig. 1).

Ved plasmaoverfladen er $B_\Theta(R) = \mu_o I_p / 2\pi R$. Vi ser først på det simpleste tilfælde, hvor al strømmen løber i plasmaets overflade, og hvor der derfor kun er magnetfelt uden for plasmaet. Inde i plasmaet hersker der så et konstant tryk $p(r) = p_o$. Trykbalance på plasmaoverfladen mellem det udadrettede partikeltryk og det indadrettede magnetfelttryk kræver derfor $B_\Theta^2(R)/2\mu_o = p_o$.

I det generelle tilfælde vil plasmastrømmen, I_p , være fordelt over søjlens tværsnit, og der vil så også være B_Θ -felt inde i plasmaet. For at finde betingelsen for trykligevægt ser vi igen på y -komponenten af kræfterne på en skal som under diskussionen af Θ -pinchen ovenfor (se fig. 7). På ydersiden påvirkes skallen i den negative y -retning af partikeltrykket $p(r_o + \Delta r)$ og af magnetfelttrykket, $B_\Theta^2(r_o + \Delta r)/2\mu_o$. På indersiden påvirkes skallen i den positive y -retning af $p(r_o)$ og af $B_\Theta^2(r_o)/2\mu_o$. Endelig påvirkes de to endeflader i y -retningen af partikeltrykket, $p(r_o)$, og i den negative y -retning af magnetfelttrækket, $B_\Theta^2(r_o)/2\mu_o$. Interesserede læsere inviteres til at sætte summen af kræfterne lig nul og vise, at trykbalanceligningen bliver

$$\frac{d}{dr} \left\{ p(r) + \frac{B_\Theta^2(r)}{2\mu_o} \right\} + \frac{B_\Theta^2(r)}{\mu_o r} = 0. \quad (3)$$

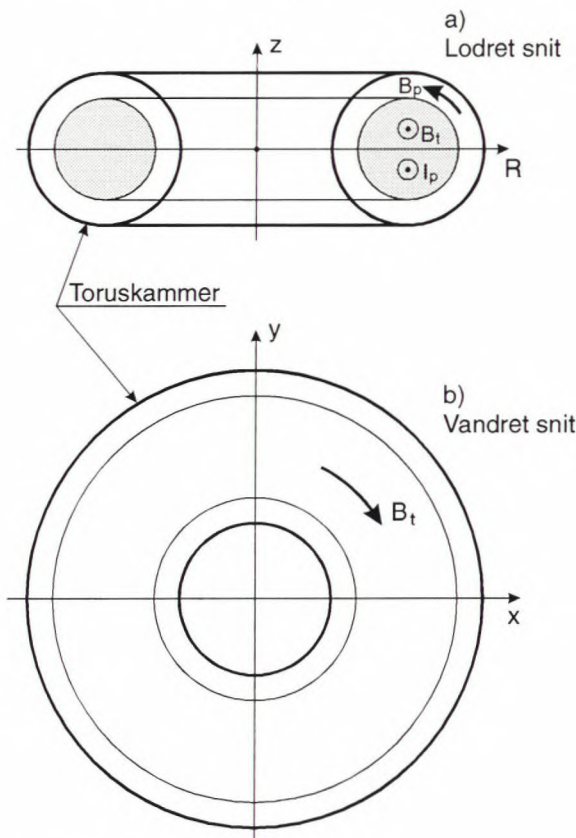


Figur 8. Plasma i rent toroidalt felt.

Plasmaring i rent toroidalt magnetfelt

Et fusionsplasma skal holdes indesluttet i et magnetfelt, der hindrer det i at komme i kontakt med væggene i det omliggende kammer. Da plasmaets ladede partikler kan bevæge sig frit langs magnetfeltlinierne, er det nødvendigt,

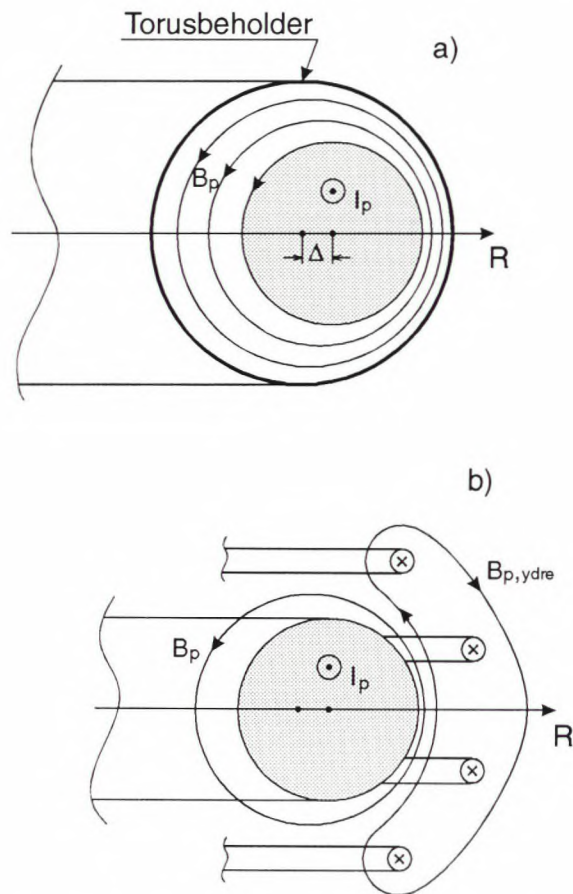
at disse linier på intet sted skærer gennem kammerets vægge. Et toroidalt felt, hvor feltlinierne er koncentriske cirkler, er den simpleste konfiguration, der opfylder dette krav. Kammeret har form som en torus (bilslangeform), og feltet genereres enten af en enkelt ret strømleder langs torusaksen eller af en række spoler, der ligger rundt omkring torus. Plasmaet ligger som en lukket ring i torus, se fig. 8, hvor toruskammeret er udeladt. Ved brug af magnetiske spændinger, vil vi nu vise, at plasmaringen ikke kan være i ligevægt i dette rent toroidale felt.



Figur 9. Plasma i tokamakfelt.

Vi ser på den halvdel af plasmaringen, som i det vandrette snit i fig. 8b) ligger i den positive y -halvplan, og betragter de kræfter, der påvirker denne halvring i y -retningen. Vi ser først på feltet, som det ville have været på plasmaringens overflade, hvis plasmaet ikke havde været til stede. Det har en r^{-1} -afhængighed, og vi ved fra diskussionen af vakuumsfelter i første del af denne artikel, at summen af alle magnetiske kræfter på et vilkårligt volumenelement i et vakuumsfelt er lig 0. Altså balancerer y -komponenten af de magnetiske trykkræfter, der påvirker det halvringformede elements krumme overflade i y -retningen, eksakt de magnetiske trækkræfter, der påvirker elementets plane endeplaner i den negative y -retning. Vi fylder nu plasma i elementet. Da der ikke flyder nogen plasmastrøm i toroidal retning, er feltet på elementets krumme overflade uændret, og det samme vil nu gælde for den resulterende kraft i y -retningen, der skyldes dette felts påvirkning af denne overflade. Feltet inde i plasmaet vil imidlertid

svækkes på grund af den diamagnetiske virkning, der er diskuteret ovenfor under Θ -pinchen. Resultatet bliver, at det magnetiske træk i endeplanerne formindskes og bliver for lille til at balancere kraften på den krumme overflade. Plasmaringen er ikke i ligevægt, den vil ekspandere i y -retningen. Det bør nævnes, at ekspansionstendensen forstærkes yderligere af, at partikeltrykket nu også påvirker endeplanerne med en trykkraft i y -retningen.



Figur 10. a) Plasma i balance i tokamak med perfekt ledende torusvægge. b) Plasma i balance i tokamak med poloidale spoler.

Tokamakken

Der er forskellige muligheder for at modificere den rent toroidale konfiguration, så plasmaligevægt opnås. Tokamakken, der er vist på fig. 5, er den, der har opnået den hidtil bedste plasmaindeslutning. Brug af de magnetiske spændinger gør det muligt at give en kvalitativ forklaring på, hvorfor tokamakplasmaet er i ligevægt.

En tokamak har også et toroidalt felt som diskuteret ovenfor, det er genereret af en række spoler lagt rundt omkring toruskammeret (vist på fig. 5, men ikke på fig. 9). For at kompensere for den resulterende kraft i y -retningen på den halve plasmaring i det rent toroidale felt, som diskuteret i forrige afsnit, sendes der i en tokamak en plasmastrøm, I_p , rundt i plasmaet. Denne strøm genererer et poloidalt magnetfelt, B_p , hvis feltlinier løber rundt om

plasmaringen som vist på fig. 9a). I sig selv kan B_p -feltet ikke kompensere for B_t -feltets resulterende kraft i y-retningen, idet det i endnu større grad end B_t -feltet er stærkere på indersiden af plasmaringen end på ydersiden. Derfor påvirker det også den halve plasmaringens krumme overflade med en y-rettet kraft. Kun ved kunstigt at forøge B_p -feltet på ydersiden (og måske svække det på indersiden) kan den resulterende kraft på ringen vendes til at gå i den negative y-retning. Dette kan opnås på to måder som antydnet på fig. 10. I a) er plasmaet indesluttet i en torusbeholder med perfekt ledende vægge, det betyder, at B_p -feltlinierne ikke kan trænge gennem dem. En lille forskydning, Δ , af plasmatværsnittets centrum fra torustværsnittets centrum bevirker derfor, at B_p -feltet forøges på plasmaringens yderside og svækkes på indersiden. Det medfører så et indadrettet B_p -felttryk på plasmaringen, og ligevægt kan opnås. I b) er der lagt en række ydre poloidale spoler langs plasmaringen, de påtrykkes en strøm modsat rettet plasmastrømmen. Superpositionen af de ydre spolars felt, $B_{p,ydre}$, og plasmastrømmens felt, B_p , bliver et stærkt felt på plasmaets yderside. Herved opnås, at det samlede tryk af B_p - og $B_{p,ydre}$ -felterne er indadrettet, og ligevægt kan opnås.

Hvad et kuglelyn ikke er

I litteraturen er der mange beretninger om observationer af såkaldte kuglelyn. Kuglelyn synes at kunne opstå uden påviselig grund, men ofte i forbindelse med tordenvejr. De udgør en form for lysende legemer, der ofte bevæger sig, og som somme tider opløses i mindre eksplosioner. Om kuglelyn er et virkeligt eksisterende fænomen, er stadig under diskussion. En af de fremsatte fysiske forklaringer på kuglelyn er, at de dannes i forbindelse med tordenvejr og er en slags afsnørede lyn. I et kuglelyn skulle der så løbe elektriske strømme rundt i det lysende legeme, som skulle være i plasmatilstanden. Disse strømme skulle generere magnetfelter omkring legemet, som skulle holde det indesluttet. Ud fra grundligningerne (A.1), (A.2) og (A.10) for magnetisk indesluttet plasma er det muligt generelt at vise, at et plasma ikke kan holdes indesluttet af magnetfelter, der genereres af strømme, der alle kun løber inde i plasmaet. Dette såkaldte virialteorem er ret kompliceret at vise. Som sidste eksempel på brug af magnetiske spændinger vil vi vise, at en simpel symmetrisk plasmaring som den, der er vist på fig. 8, ikke kan holdes indesluttet i magnetfelter, som alene er genereret af strømme i selve ringen. Strømme i ringen kan løbe rundt i den toroidale retning og i den poloidale retning. Toroidale strømme genererer et poloidalt magnetfelt uden for plasmaet, men som også kan løbe i plasmaet. Poloidale strømme genererer et toroidalt magnetfelt, som kun løber inde i plasmaet. Vi ser igen på den halvdel af plasmaringen, som på fig. 8b) befinder sig i den positive

y-halvplan. Partikeltrykket, p , mod endefladerne påvirker den med en kraft i y-retningen. Denne kraft kan kun kompenseres af trækraften af et toroidalt magnetfelt, B_t , hvor $B_t^2/2\mu_0 \geq p$. På plasmaets krumme overflade virker der nu et udadrettet tryk, som er summen af partikeltrykket og det toroidale magnetfeltryk. Dette kan kun balanceres af et indadrettet tryk af det poloidale magnetfelt B_p , hvor så $B_p^2/2\mu_0 \geq B_t^2/2\mu_0 + p$. Da dette B_t -felt på grund af dets større styrke på plasmaringens inderside har en resulterende kraft i y-retningen som mindst er lig B_t -feltets trækraft i den negative y-retning, ses det, at der ikke er mulighed for ved hjælp af de mulige magnetfelter at holde plasmaringen sammen.

Et kuglelyn er altså ikke en aksesymmetrisk plasmaring, der holdes indesluttet af magnetfelter, der alene er genereret af strømme i plasmaet.

Afsluttende bemærkninger

I denne artikel har vi diskuteret, hvordan magnetfelter kan opfattes som spændingstilstande, der transmitterer kræfter fra et sted i rummet til et andet. Denne måde at opfatte magnetfelter på er især nyttig inden for plasmafysikken, da man her kan udnytte, at man blot skal addere plasmaets partikeltryk til de magnetiske spændinger for at få et samlet billede af de kræfter, der påvirker et plasma. Andre felter, som f.eks. elektriske felter eller tyngdefelter kan behandles på tilsvarende måde, og man vil finde, at de også kan opfattes som spændingstilstande, der transmitterer kræfter gennem rummet. Da det imidlertid mest er opfattelsen af de mere komplicerede magnetiske kræfter, og især deres vekselvirkning med plasmaer, der lettes ved at indføre magnetiske spændinger, har vi her begrænset os til at betragte magnetfelter.

Referencer:

- 1) V.O. Jensen, *Magnetic Stresses in Ideal MHD Plasmas.*, Physica Scripta **51**, 490 (1995)



Vagn O. Jensen er dr.phil. i plasmafysik. Han er ansat i fusionsforskningsenheden på Risø og som ekstern lektor på DTU.

Korrespondensprincippet diskrete charme

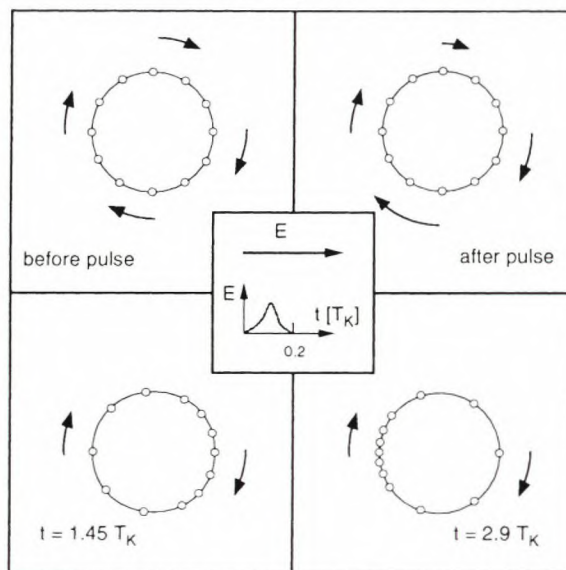
Ove Nathan

Overgangen fra det klassiske billede af atomet til kvantebeskrivelsen er tilsyneladende et udtømmeligt emne i fysikken. Pudsigt nok, for kvantemekanikken giver os jo - i al fald i princippet - en fuldstændig beskrivelse af atomets fysik, og hvad skal man så med den forældede og fejlagtige, halv-klassiske atommodel med elektroner, der bevæger sig i elliptiske Keplerbaner omkring kernen, og som er underkastet nogle postulerede kvantebetingelser?

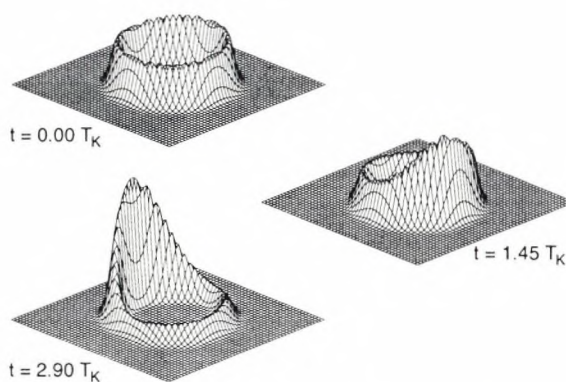
Men nye måder at anskue gamle sager kan føre til overraskende udviklinger. Den halv-klassiske model indeholder blandt andet en pædagogisk inspiration, som ikke mindst har sit udspring i korrespondensprincippet. Princippet udsiger, at den klassiske beskrivelse og kvantebeskrivelsen nærmer sig hinanden i grænsen af høje værdier af hovedkvantetallet n . For store værdier af n skulle Keplerbanerne altså have en slags fysisk realitet. Tænk, hvis man kunne eftervise det eksperimentelt, altså - for at tale i kvantesproget - skabe lokaliserede elektron-bølgepakker og følge bølgepakkens bevægelse i en cirkulær eller en elliptisk bane rundt i atomet, i al fald nogle omgange. Kvantemekanikkens fædre var meget optaget af sådanne bølgepakker og af bølgepakkernes opbygning via kohærente kvantetilstande. På den tid var det udelukket at lave eksperimentet. Værktøjet manglede. Men nu er værktøjet til rådighed: pulsede lasere, der kan producere ultrakorte pulser, af varighed, der måles i picosekunder og femtosekunder. Med sådanne laserpulser er det blevet muligt at skabe lokaliserede bølgepakker i "Rydberg-atomer", dvs atomer med en eller flere elektroner anslået til tilstande med store værdier af n , i området $n = 25$ til 100, eller højere, og med store baneimpulsmomenter. Rydberg-atomet kan have forholdsvis lang levetid overfor spontant henfald, af størrelsesordenen mikro- eller millisekunder. Rydberg-atomets rumlige udstrækning er betydelig, nemlig proportional med kvadratet på n , således at man opnår atomradier af størrelsesordenen 10 000 Bohr radier - atomet får næsten makroskopisk dimension.

Jeg stødte på den sag engang sidste sommer ved at læse en kommentar i det engelske tidsskrift Nature. Redaktøren af Nature, John Maddox (selv fysiker), har et vågent blik for, hvad han kalder "fun and games" i fysikken, og man bliver sjældent skuffet, hvis man via hans tilbagevendende klumme går på jagt i originallitteraturen. Maddox var blevet inspireret af en publikation fra august 1994 i The Physical Review Letters, skrevet af en fysikergruppe fra Institute of Optics ved Rochester Universitetet i USA. Heri fortælles om eksperimenter i det klassisk-kvantefysiske grænseområde, og som forløber i tre faser. I første fase - hvor der benyttes allerede kendt teknologi - skabes en cirkulær Rydberg-tilstand, fx i et alkali-atom. I eksperimentets næste fase benyttes en kort laserpuls til at konver-

tere den cirkulære elektrontilstand til en bølgepakke, som er lokaliseret både radielt og i de to vinkelkoordinater.



Figur 1. Bundtning af elektroner, der bevæger sig i en cirkulær Rydberg-bane. Et ensemble af klassiske elektroner bevæger sig på cirklen, jævnt fordelt, og udsættes for en elektrisk impuls, hvis længde kun er en brøkdel af omløbstiden, T_K , i keplerbanen (boksen i midten). Lige efter impulsen vil der være en hastigheds-dispersion, men endnu ingen bundtning (foroven, til højre). Efter tre omløb er bundtningen tydelig (forneden, til højre).



Figur 2. Kvantemekanisk beregning af det samme fænomen, som i fig. 1. Også her udsættes et cirkulært Rydberg-atom (med hovedkvantetal, n , af størrelsesorden 50) for en kort elektrisk impuls, som ikke ændrer den cirkulære bølgepakkens rumlige udseende lige efter impulsen. Men efter forløbet af tre Kepler-perioder har elektronens sandsynlighedsfordeling nu form af en bølgepakke, der er afgrænset til et snævert vinkelrum, og hvis bevægelse følger en Kepler-bane.

Post-Doctoral Position in Soft Condensed Matter Interfaces

In the Department of Solid State Physics at Risø National Laboratory a Post-Doctoral position is open for one year, renewable for one further year.

The position is for experimental work in the field of Soft Condensed Matter Interfaces:

- * Langmuir films at liquid interfaces and on solid supports.
- * Spin coated films of polymers, etc.

The tools will be X-ray scattering at synchrotrons (mainly Hasylab, DESY, Hamburg and ESRF, Grenoble) and in the laboratory, complemented with neutron reflectometry at Risø's DR 3 reactor.

Terms of employment:

- * Similar to Danish staff at Risø National Laboratory.

Qualifications:

A Ph.D. degree in physics or chemistry obtained within the last two years.

Further information can be obtained from:

Kristian Kjær, The Department of Solid State Physics

E-mail: kkjaer@risoe.dk

Phone: +45 4677 4709

Fax: +45 4237 0115

Application including Curriculum Vitae, publication list, and full personal data should be addressed to the

Personnel Department
Risø National Laboratory
P.O. Box 49
DK-4000 Roskilde
Denmark

Application deadline 18th April 1995

RISØ

Risø National Laboratory is the largest research institution in Denmark with about 950 employees. The main research areas are energy, environment and materials.

balzers

QualySniff – Garantien for læk-tæthed

*Let at anvende
Hurtig og nøjagtig
Automatisk kalibrering
Baggrunds subtraktion
Automatisk fejldiagnostik
Låsbare programparametre*



Nordiska Balzers AB
Baunegårdsvej 7 L
DK-2820 Gentofte
Tel. 31 68 32 61
Fax 31 68 22 55

Nordiska Balzers AB
Box 10412
S-434 24 Kungsbacka
Tel. *46-300 710 80
Fax *46-300 172 85

K032DK



ET FORBAVSENDE BUD PÅ »VIRKELIGHEDEN«! 195,- kr. HOS BOGHANDLEREN

Tilmeldingsblanket for fuldt betalende deltagere

Application form for fully paying participants.

DFS'95

- | | | |
|--------------------------|--------------------|--|
| ☐ | <u>kr. 1.930,-</u> | m. 2 overnatninger (31/5 - 2/6)
2 nights (Wednesday and Thursday) |
| ☐ | <u>kr. 1.390,-</u> | m. 1 overnatning (31/5 - 1/6)
1 night (Wednesday) |
| ☐ | <u>kr. 1.390,-</u> | m. 1 overnatning (1/6 - 2/6)
1 night (Thursday) |
| ☐ | <u>kr. 850,-</u> | Uden overnatning
without accommodation |

Navn/Name: _____
Adresse/Address: _____
By/City: _____
Telefon/Telephone: _____
Telefax: _____
E-mail: _____

Tilmelding sendes sammen med en check på det afkrydsede beløb **senest den 15. april**, til:

Please send the application form with a cheque in danish crowns, drawn on a danish bank, **before the 15th of April**, to:

KongresBureau Fyn
Dansk Fysisk Selskab's årsmøde
Odense Turistforening
Rådhuset
DK-5000 Odense C.
Denmark

Dato/Date: _____

Underskrift/Signature:

Afbestillingsregler: Framelding skal ske til KongresBureau Fyn, senest 1 uge før mødet.

Cancellation: Cancellation must be done to KongresBureau Fyn, 1 week before the meeting.

Registration of Abstract to the DFS'95 meeting in Odense.

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|----------|--|
| ☐ | Solid State Physics: | Mail to: | Preben Alstrøm, Niels Bohr Institutet
Københavns Universitet
Blegdamsvej 17, 2100 København Ø. |
| ☐ | Atomic Physics: | Mail to: | Jens Juul Rasmussen, Optik og Fluid Mekanik
Forskningscenter Risø, 4000 Roskilde |
| ☐ | Astrophysics: | Mail to: | Bodil Helt, Astronomisk Observatorium
Øster Voldgade 3, 1350, København K. |
| ☐ | General: | Mail to: | Mai Klarskov, Fysisk Institut, Bygn. 309,
Danmarks Tekniske Universitet, 2800 Lyngby |
-
- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| ☐ | Student (non Ph.D. student) |
| ☐ | Ph.D. student |
| ☐ | Postgraduates and others. |

A limited number of abstract will be selected for oral presentation, the remaining abstracts for poster presentation.

It is not possible to indicate personal performance.

Tilmeldingsblanket for Ph.D. studerende

Application form for Ph.D. students

DFS'95

- | | | |
|--------------------------|--------------------|---|
| ☐ | <u>kr. 1.410,-</u> | m. 2 overnatninger i dobbeltværelse (31/5 - 2/6)
2 nights in a double bedroom (Wednesday and Thursday) |
| ☐ | <u>kr. 1.130,-</u> | m. 1 overnatning i dobbeltværelse (31/5 - 1/6)
1 night in a double bedroom (Wednesday) |
| ☐ | <u>kr. 1.130,-</u> | m. 1 overnatning i dobbeltværelse (1/6 - 2/6)
1 night in a double bedroom (Thursday) |
| ☐ | <u>kr. 850,-</u> | Uden overnatning
without accommodation |

Navn/Name: _____

Adresse/Address: _____

By/city: _____

Telefon/Telephone: _____

Telefax: _____

E-mail: _____

Jeg ønsker at dele dobbeltværelse med: _____

I wish to share a double bedroom with: _____

Tilmelding sendes sammen med en check på det afkrydsede beløb **senest den 15. april**, til:

Please send the application form with a cheque in danish crowns, drawn on a danish bank, **before the 15th of April** to:

KongresBureau Fyn
Dansk Fysisk Selskab's årsmøde
Odense Turistforening
Rådhuset
DK-5000 Odense C
Denmark

Dato/Date: _____

Underskrift/Signature: _____

Afbestillingsregler: Framelding skal ske til KongresBureau Fyn, senest 1 uge før mødet.

Cancellation must be done to KongresBureau Fyn, 1 week before the meeting.

- ☐ m. 2 overnatninger i dobbeltværelse(31/5 - 2/6)
2 nights in a double bedroom (Wednesday and Thursday)
- ☐ m. 1 overnatning i dobbeltværelse (31/5 - 1/6)
1 night in a double bedroom (Wednesday)
- ☐ m. 1 overnatning i dobbeltværelse (1/6 - 2/6)
1 night in a double bedroom (Thursday)
- ☐ Uden overnatning
without accommodation

Navn/Name: _____
Adresse/Address: _____
By/City: _____
Telefon/Telephone: _____
Telefax: _____
E-mail: _____

Jeg ønsker at dele dobbeltværelse med: _____
I wish to share a double bedroom with: _____

Tilmelding sendes **senest den 15. april** til:
Please send application form **before the 15th of April**, to:

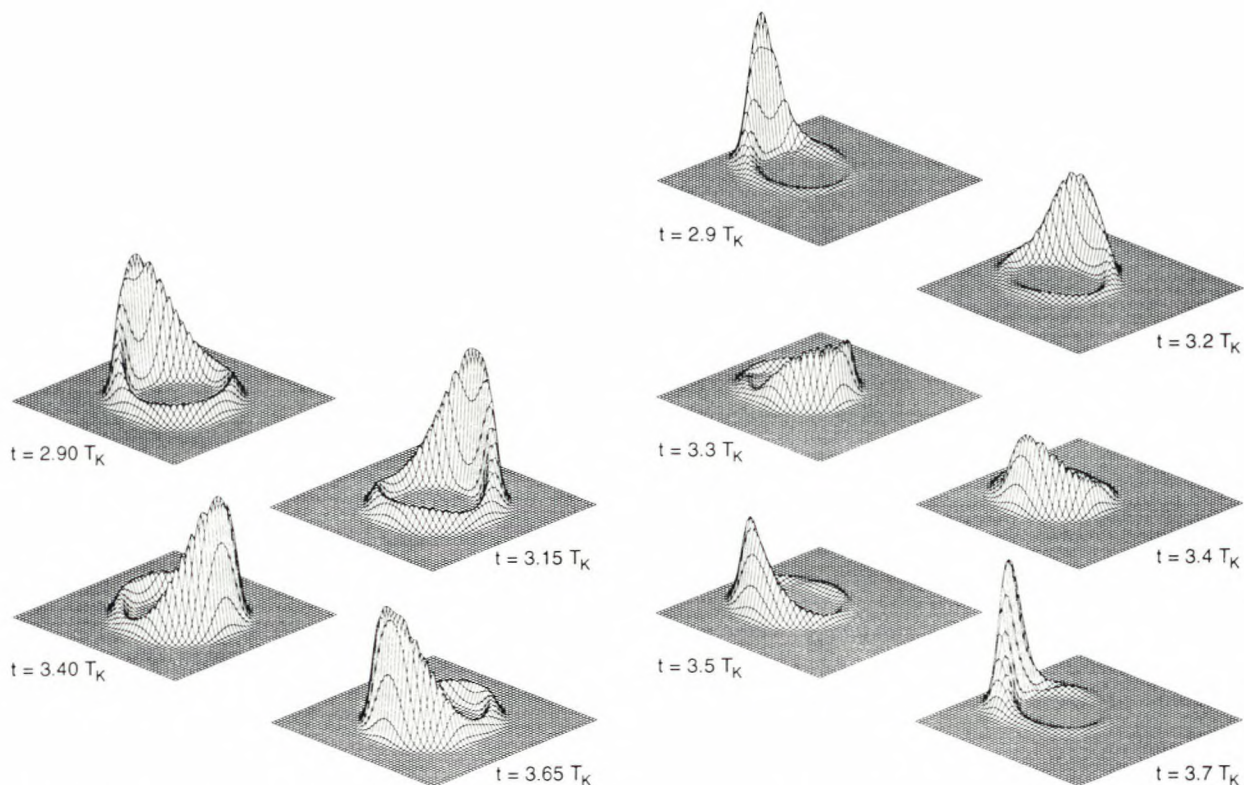
KongresBureau Fyn
Dansk Fysisk Selskab's årsmøde
Odense Turistforening
Rådhuset
DK-5000 Odense C.
Denmark

Dato/Date: _____

Underskrift/signature:

Der er kun et begrænset antal fripladser.
Hvis flere melder sig, bliver det nødvendigt at kræve betaling svarende til ph.d. betaling.
There is only a limited number of students bursaries.

Afbestillingsregler: Framelding skal ske til KongresBureau Fyn, senest 1 uge før mødet.
Cancellation must be done to KongresBureau Fyn, 1 week before the meeting.



Figur 3. Bølgepakken fra fig. 2 følges her i sin cirkulære bane over det meste af en Kepler-periode.

Figur 4. Ved hjælp af et forholdsvis svagt elektrisk felt i baneplanen, som påtrykkes i en impuls, hvis varighed er adskillige Kepler-perioder, kan man deformere en cirkulær bane. Banen bliver elliptisk, og bølgepakken forbliver i den nye elliptiske Kepler-bane. Ellipsens storakse er vinkelret på feltvektoren. Bølgepakken kan følges under et omløb på figurens fem "snapshots". Excentriciteten er 0,6. Bølgepakken bevæger sig hurtigst nærmest kernen og langsomt i den modsatte ende. Bølgepakkens form er tydelig forskellig i de to situationer.

Bølgepakken bevæger sig langs en cirkelbane, og den kan genereres så skarpt, at den næsten bliver en "minimal-pakke", dvs rumligt så koncentreret som ubestemthedsrelationerne tillader det. I eksperimentets slutfase benyttes endnu en laserimpuls til at konvertere bølgepakkens bane fra cirkulær form til en ellipse, med stor excentricitet. De eksperimentelle enkeltheder kan studeres i originalliteraturen, nærværende fremstilling skal blot opfattes som appetitvækker.

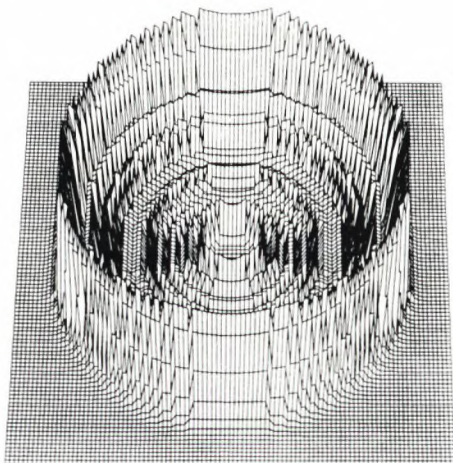
I fig. 1 illustrerer Rochester-gruppen med en klassisk analogi, hvordan en kort laserpuls kan modulere bevægelsen af et ensemble af jævnt fordelte elektroner, der bevæger sig i en cirkelbane, så der skabes et elektronbunt - en bølgepakke. Hver negativ partikel modtager en impulsændring fra laserens elektriske felt, således at partikler der bevæger sig mod feltretningen, bliver accelereret, partikler, der bevæger sig med feltretningen, bliver bremsede, mens partikler, der bevæger sig vinkelret på feltretningen, ikke påvirkes. Lige efter laserpulsens har alle partikler praktisk taget uændrede positioner, men der er altså sket en hastighedsmodulation. Efter nogen tid vil spredningen i impulsrummet omdannes til en spredning i koordinatrummet - de hurtige partikler vil have indhentet de langsomme, og der sker en bundtning. Opbygningen af bølgepakken kan naturligvis også følges

kvantemekanisk, se fig.2. Den cirkulære bevægelse af bølgepakken over en Kepler-periode er vist på fig.3. Figur 2 og 3 er teoretiske beregninger, men teknikken er så udviklet, at bølgepakkens udvikling i tid kan verificeres eksperimentelt i stor detalje. Så meget om eksperimentets fase 2.

Kronen på værket - foreløbig - er fase 3, de elliptiske Kepler-baner. Rochester-gruppen beskriver, hvorledes man med endnu et passende formet, pulset elektrisk felt kan konvertere bølgepakkens bane fra cirkulær til elliptisk. Fig.4 viser en bane med excentricitet på ca. 0,6, og hvor bølgepakkens bevægelse igen følges over en Kepler-periode. Figuren illustrerer smukt, at bølgepakkens udseende varierer med hastigheden i banebevægelsen. Når bølgepakken er tættest ved atomets kerne, bevæger den sig hurtigt (jfr. planetbevægelsen i solsystemet), og bølgepakken tværes ud. Når bølgepakken er fjernest fra kernen, er hastigheden lavere, og bølgepakken koncentrerer sig. Bølgepakken kan følges - teoretisk og eksperimentelt - i nogle Kepler-perioder, indtil den opløses via kvantemekaniske interferenseffekter.

Rochester-gruppen har arbejdet i mere end et årti med lokalisering af elektron bølgepakker i Rydberg-atomer, i forskellige varianter. Således illustrerer fig.5 et arbejde

fra 1988, hvor en bølgepakke lokaliseres i vinkelkoordinaterne, men ikke radielt. Bølgepakken er igen praktisk taget en minimum-pakke, opbygget af $n = 50$ tilstande. Bølgepakken kan følges eksperimentelt under flere omløb af en Kepler-bane, indtil dens kohærens ødelægges ved strålingshenfald eller ved atomare sammenstød. Fig.6 skitserer den eksperimentelle opstilling.

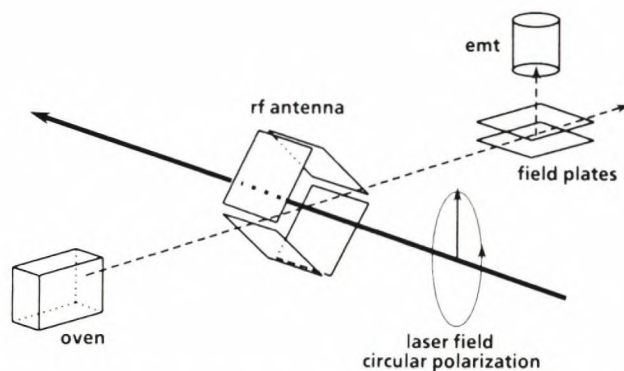


Figur 5. Ved en kohærent superposition af Rydberg-tilstande kan man opbygge en bølgepakke, der er lokaliseret i vinkelkoordinaterne, men ikke radielt. Figuren er beregnet, et slags computerekperiment, hvor bølgepakken er mikset sammen af tilstande i natriumatomet med højt hovedkvantetal, $n=50$, og med store impulsmomenter. Rigtig eksperimentelt, kan en sådan tilstand skabes ved en kombination af en optisk excitation og et passende radiofrekvens-felt. Når rf-feltet er fjernet, vil bølgepakken kunne fortsætte i nogen tid i en klassisk banebevægelse. Eksperimentelt kan man efterfølgende studere bølgepakkens bevægelse ved at ionisere atomet med et kortvarigt elektrisk felt, og derefter iagttage ioniseringssignalet. Ioniseringsstyrken afhænger bl.a. af bølgepakkens position i banen.

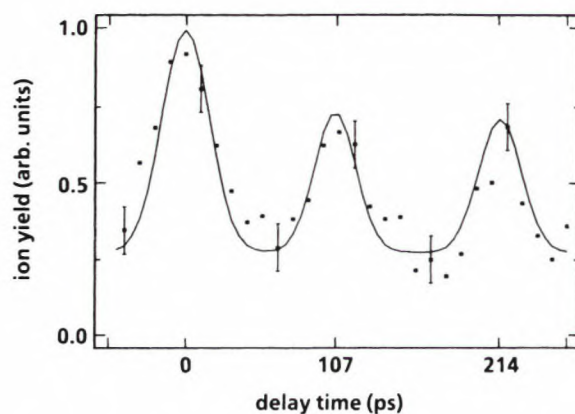
Måling af sandsynligheden for ionisering er et centralt element i registreringen af Rydberg-atomernes egenskaber. I mange tilfælde kan man udnytte den omstændighed, at ioniseringsandsynligheden vokser, når elektronen nærmer sig atomets kerne, og dermed får voksende sandsynlighed for at udveksle impuls med kernen. Umiddelbart kunne man måske have gættet anderledes. Når elektronen er langt fra den positivt ladede kerne, er den elktrostatisk tiltrækning jo relativt svag. Og så skulle det være forholdsvis nemt for et ydre felt at rive elektronen ud. Men ioniseringen er et dynamisk fænomen, hvor impulsoverførsel er væsentlig. Og kernen har større sandsynlighed for at opfange impulsen, når elektronen er tæt ved den.

Man kan udnytte denne dynamiske ioniseringseffekt til at måle omløbstiden, når banen er stærkt elliptisk, jfr. fig. 4. Der kommer et maksimum af ionisering, når den udtværede bølgepakke suser forbi kernen i den ene ende af storaksen, og et minimum i den modsatte ende. Fænomenet ses også smukt i forsøg med cirkulære bølgepakker, der er lokaliseret radielt, men ikke i vinkelkoordinaterne. Den slags bølgepakker kan bringes i en oscillerende bevægelse, så bølgepakken så at sige ånder ind

og ud (Rochester-gruppen, 1989). Ioniseringssignalet bør så vise en tilsvarende, periodisk struktur (fig.7).



Figur 6. Grundelementerne i en forsøgsopstilling, der kan anslå og registrere en lokaliseret bølgepakke som den, der er vist på fig.5. Signaturen emt står for electron multiplier tube - som bruges til at måle ioniseringsstyrken.



Figur 7. Oscillationer af en radielt lokaliseret bølgepakke. punkterne er eksperimentelle ioniseringsudbytter, og kurven er en teoretisk forudsigtelse, svarende til en klassisk baneperiode på 107 picosekunder. Bredden af oscillationssignalet afhænger af antallet af tilstande, der er involveret i opbygningen af bølgepakken. Kurven er beregnet for 5 tilstande med $87 < n < 91$.

Der er også en levende interesse for Rydberg-atomer flere steder i det danske forskningsmiljø. En atomfysisk gruppe ved Fysisk Institut i Århus har således benyttet en metode med krydsede elektriske og magnetiske felter til at danne såvel cirkulære som orienterede, elliptiske Rydberg atomer. Metoden egner sig for produktion af et egentligt target af orienterede, elliptiske Rydberg atomer, så man fremover vil kunne udføre både spektroskopiske studier af den slags systemer og studere deres opførsel i atomare sammenstød.

Studiet af Rydberg-tilstande i atomer og molekyler har mange forgreninger, bl.a. til astrofysikken. Og springet

til at anvende pulsede lasere i specielle kemiske reaktioner er måske ikke så stort. Men først og fremmest tjener Rochester-gruppens arbejde med de ultra-korte laserpulser til at belyse sammenhængen mellem klassisk fysik og kvantemekanik. Eksperimenterne viser, at det klassiske system, som et atom nærmer sig i korrespondensprincipets grænse, har at gøre med en forholdsvis kompleks, dynamisk genstand, der følger en klassisk bane. Billedet af en simpel klassisk elektron, en ladet punktpartikel med masse, der bevæger sig i en bane i et Rydberg atom, det billede holder ikke. Og selvom systemets udvikling over korte tider viser et ret enkelt, klassisk forløb, så er udviklingen over længere tider mere kompleks, og rører den underliggende kvantenatur af den slags kohærente, atomare tilstande. Som Rochester-gruppen udtrykker det, er det et af deres mål at kunne studere sammenhængen mellem et klassisk, kaotisk system og bevægelsen af kvantefysikkens bølgepakker. Det er min fornemmelse, at de har præsteret en indsats i den retning, der vil blive stående.

Referencer:

1) Rochester-gruppen:

Z.D.Gaeta et al., *Excitation of the Classical-Limit State of an Atom*, Physical Review Letters **73**, 636 (1994)

John A.Yeazell et al., *Classical Periodic Motion of Atomic-Electron Wave Packets*, Physical Review A

40, 5040 (1989)

John A.Yeazell and C.R.Stroud, Jr., *Observation of Spatially Localized Atomic Electron Wave Packets*, Physical Review Letters **60**, 1494 (1988)

- og referencer citeret i disse artikler.

2) Århus-gruppen:

S.B.Hansen et al., *Electron Capture from Circular Rydberg Atoms*, Physical Review Letters **71**, 1522 (1993)

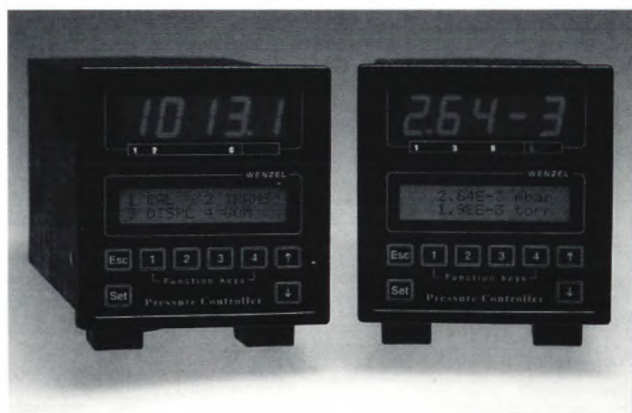
J.C. Day et al., *Formation of Oriented Elliptic Rydberg Atoms*, Physical Review Letters **72**, 1612 (1994)

- og referencer citeret i disse artikler.



Ove Nathan er professor ved Niels Bohr Institutet. Har tidligere arbejdet med eksperimentel kernefysik. Derefter i en årrække universitetsrektor. Nuværende interesse: fysik, i bred forstand.

MODERNE VAKUUMTEKNIK TIL FORSKNING OG INDUSTRI



PRC X1

1x10⁻⁵ TO 1999.9 mbar.

DUALTRANS MICROPIRANI PIEZO

WENZEL VAKUUM TEKNIK har i 23 år solgt ALCA-TEL's vakuumprodukter i Danmark; men trods særdeles stor salgsfremgang i 1994, har ALCATEL pludselig valgt en ny partner. WVT vil dog stadig tilbyde alle vore AL-CATEL kunder fuld mekanisk og elektronisk service på alle vakuumprodukter. Vort store og ofte lagerførte program i standard vakuumfittings til konkurrencedygtige priser er helt uafhængig af ændringen, og gennem ny leverandører kan vi stadig til byde vakuumpumper og tilbehør i høj kvalitet til konkurrencedygtige priser. WENZEL ELECTRONICS dansk udviklede præcisions måle- og styreinstrument, 1x10⁻⁵mb – 1999,9 mb, som leveres med certifikat for sporbarhed, er blevet en stor succes, og vi fortsætter med udviklingen af ny produkter, ligesom vi fremstiller flere og flere specialanlæg til f.eks. sputtering eller elektronkanonfordampning, afgangning og vakuumimprægnering, massespektrometeranalyse etc.

ALLE FORMER FOR OLIEFRI & OLIESMURTE ROTATIONSVAKUUMPUMPER • FEDTSMURTE TURBOMOLEKULAR- SPIRO- & HYBRIDPUMPER • DIFFUSIONS- & CRYOPUMPER • VAKUUMMÅLEINSTRUMENTER, VENTILER, HV & UHV FITTINGS • HELIUM LØKSØGERE & MASSESPEKTROMETRE • SPUTTER- ELEKTRONKANON & ÆTSEANLÆG • RF & HV STRØMFORSYNINGER • RUSTFRI SPECIALKAMRE & DELE • OMBYGNING AF VAKUUMANLÆG

**WENZEL VAKUUM TEKNIK APS • NYBROVEJ 283 • DK-2800 LYNGBY • TLF. 45 87 97 35
SHOWROOM, SERVICE, LAGER • NYBROVEJ 193 • BIL 30 42 63 00 • FAX 45 93 32 93**

Fra Bernoullis forunderlige polynomier og tal via Euler–Maclaurins sumformel til Rombergs integralapproximation

Anden del.

Mogens Esrom Larsen
Københavns universitets matematiske institut

I første del stiftede vi bekendtskab med *Bernoullipolynomierne*, de første seks ser fredelige ud,

$$\begin{aligned} B(x, 0) &= 1 \\ B(x, 1) &= x - \frac{1}{2} \\ B(x, 2) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B(x, 3) &= x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ B(x, 4) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B(x, 5) &= x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{3}\right) \\ B(x, 6) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \end{aligned} \tag{13}$$

og den almindelige formel er

$$B(x, m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k} x^k \tag{10}$$

hvor indgår *Bernoullitalle*, der defineres rekursivt ved

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} B_j &= 0 \text{ for } i > 1 \end{aligned} \tag{11}$$

De første Bernoullital så meget uskyldige ud:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6} \tag{12}$$

men de vokser meget hurtigt, faktisk ligner de $(2(2n)!)/((2\pi)^{2n})$. F. eks. er nogle af dem

$$\begin{aligned} B_{20} &= -\frac{174611}{330}, B_{40} = -\frac{261082718496449122051}{13530}, \\ B_{60} &= -\frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{56786730} \end{aligned}$$

Bernoullipolynomierne havde den vigtige egenskab, at

$$B'(x, m) = mB(x, m-1) \tag{6}$$

så de kunne indgå bekvemt i en række partielle integrationer. Dette gav os *Euler–MacLaurin's* sumformel,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt &= \frac{x_2 - x_1}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} (x_2 - x_1)^{2j} (f^{(2j-1)}(x_1) - f^{(2j-1)}(x_2)) \\ &\quad - \frac{(x_2 - x_1)^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n} f^{(2n)}(\xi) \end{aligned}$$

som her skal vise sig at indgå på afgørende måde i moderne integrationsteknik.....

Romberg integration

Hvis vi nu skal beregne et integral over et interval, $[a, b]$, så deler vi det i N lige store delintervaller, der altså hver får længden $h = \frac{b-a}{N}$. Delepunkterne betegner vi $a_0 = a, a_1 = a+h, \dots, a_i = a+ih, a_N = a+Nh = b$. Vi vil foretrække at vælge N stor nok til, at $h \leq \frac{1}{2}$. Når vi så anvender Euler-Maclaurins formel på hvert delinterval, og lægger dem alle sammen sammen, så går alle de afledede i depunkterne ud mod hinanden. Derved fås *Euler-Maclaurins sumformel*:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt = & h \left(\frac{1}{2} (f(a) + \sum_{\nu=1}^{N-1} f(a_\nu)) + \frac{1}{2} f(b) \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} (f^{(2j-1)}(a) - f^{(2j-1)}(b)) - \\ & - \sum_{\nu=1}^N \frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi_\nu) \end{aligned} \quad (25)$$

hvor $\xi_\nu \in]a_{\nu-1}, a_\nu[$. Da $h = \frac{b-a}{N}$ og $f^{(2n)}$ er kontinuert, kan vi skrive

$$\sum_{\nu=1}^N h f^{(2n)}(\xi_\nu) = (b-a) \sum_{\nu=1}^N \frac{f^{(2n)}(\xi_\nu)}{N} = (b-a) f^{(2n)}(\xi) \quad (26)$$

idet gennemsnitsværdien må antages i et punkt, $\xi \in]a, b[$. Indsættes (26) i (25), fås

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt = & h \left(\frac{1}{2} (f(a) + \sum_{\nu=1}^{N-1} f(a_\nu)) + \frac{1}{2} f(b) \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} h^{2j} (f^{(2j-1)}(a) - f^{(2j-1)}(b)) - \\ & - (b-a) \frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n} f^{(2n)}(\xi) \end{aligned} \quad (27)$$



Anvendelse:

- ★ Kvalitetskontrol
- ★ Forskning og udvikling
- ★ Analyseudstyr
- ★ Høj -og ultrahøjvakuum

Læksøger på heliumbasis

Hvilke krav stilles der?

- ★ Hurtig
- ★ Nem og entydig betjening
- ★ Oliefri indsugning
- ★ Robust
- ★ Enkelt service
- ★ Prisbillig

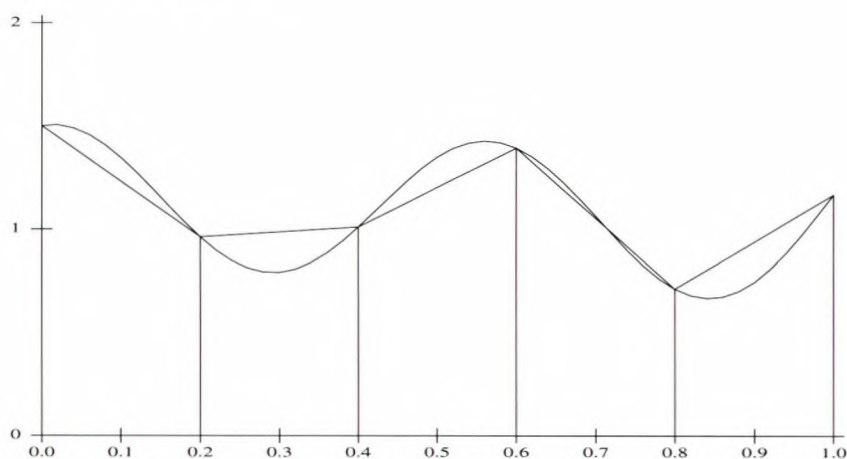
Leybold ApS
Roskildevej 342A
2630 Tåstrup
Tlf.: 43996444
Fax: 43996544



Formlens første led,

$$K_1 = h \left(\frac{1}{2}(f(a) + \sum_{\nu=1}^{N-1} f(a_\nu) + \frac{1}{2}f(b)) \right) \quad (28)$$

kaldes *kordtrapezformlen*, fordi det er den integralapproximation, man får ud af at approximere arealet under funktionens graf med trapezer med højde h og siderne lig med funktionsværdierne i endepunkterne. Resten af formelen kan så siges at være udtryk for fejlen ved denne kordtrapezformel.



Approximation med kordtrapezer

Det bemærkelsesværdige ved denne integrationsformel er, at koefficienterne til h^{2j} kun afhænger af intervallets endepunkter, ikke af h eller N .

Det betyder, at vi har en integrationsformel af formen

$$\int_a^b f(t)dt = K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j h^{2j} - (b-a) \frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n} f^{(2n)}(\xi_1)$$

Hvis vi nu fordobler antallet af delintervaller og dermed halverer skridtlængden, h , så får vi en formel af udseendet:

$$\int_a^b f(t)dt = K_2 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{h}{2}\right)^{2j} - (b-a) \frac{B_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} f^{(2n)}(\xi_2)$$

Beregning af K_2 kræver blot beregning af funktionsværdierne i alle intervallernes midtpunkter, de andre har vi i forvejen. Af disse to formler kan vi eliminere leddene, der indeholder koefficienten c_1 . Vi tager 4 af den anden og trækker den første fra. Efter deling med 3 fås:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \frac{4K_2 - K_1}{3} + \sum_{j=2}^{n-1} c_j h^{2j} \frac{2^{2(1-j)} - 1}{3} + \\ &+ (b-a) \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{h^{2n}}{3} (f^{(2n)}(\xi_1) - 2^{2(1-n)} f^{(2n)}(\xi_2)) = \\ &= K_1^1 + \sum_{j=2}^{n-1} c'_j h^{2j} + (b-a) \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{h^{2n}}{3} f^{(2n)}(\xi) \end{aligned} \quad (29)$$

idet vi definerer:

$$\begin{aligned} K_1^1 &= \frac{4K_2 - K_1}{3} \\ c'_j &= c_j \frac{2^{2(1-j)} - 1}{3} \end{aligned} \quad (30)$$

og regner med, at der findes en værdi, ξ , så

$$f^{(2n)}(\xi) = (f^{(2n)}(\xi_1) - 2^{2(1-n)} f^{(2n)}(\xi_2))$$

Dermed er fejlen på K_2 , der var af størrelsesorden $\frac{h^2}{4}$, ændret til en fejl på K_1^1 , der er af størrelsesorden h^4 . Når blot $h < \frac{1}{2}$, er det i sig selv en forbedring.

SORØDAGE 95

Sorø Akademi, 23. - 31. Juli 1995



Fra SORØDAGE 1994. Kursisterne og Niels Hessel Andersen, forsøgscenter RISØ, leger med flydende kvælstof under forsøgene med superledning.

Takket være støtte fra bl.a. Novo Nordisk og universiteterne i København, Aarhus og Odense har Dansk Fysisk Selskab siden 1988 arrangeret en serie sommerkoler. Formålet er at give gymnasielever med interesse for naturen og dens fænomener muligheder for at beskæftige sig med sider af emnekredsen astronomi-fysik-geofysik, som sjældent, eller under mindre kreative former, træffes i skolen. Dette års kursus afholdes i dagene 23.-31. juli på Sorø Akademi, som ligger i naturområdet ved Sorø sø. Stedet har gode muligheder for fritidsaktiviteter som sport, musik og sejlsads. Programmet er endnu i støbeskeen, men sommerens to hovedemner bliver nok ASTRONOMI OG SOLSYSTEMET (ved Allan Hornstrup) og JORDEN OG DE ANDRE PLANETER (ved Trine Dahl-Jensen og Klaus Mosegaard), der suppleres med indslag om aktuelle emner indenfor områderne astronomi, fysik og geofysik.

Tilmeldingsfristen er 8. maj og prisen 950 kr. Deltagerantallet er 24, og tilbuddet gælder alle elever, som til sommer afslutter 2.g. Udvælgelsen sker med hensyntagen til en jævn geografisk fordeling, lige mange piger og drenge, mv. Et mindre antal fripladser er til rådighed. Foldere med indbydelse og tilmeldingsblanketter udsendes omkring påske til alle landets gymnasier via fysiklærerforeningens kontaktpersoner. De kan også bestilles ved at skrive til Nils O. Andersen, Niels Bohr Institutet, Ørsted Laboratoriet, Universitetsparken 5, 2100 Kbh. Ø, eller ved henvendelse på telefon 35 32 04 69 eller 35 32 04 01.

Matematisk Fysik

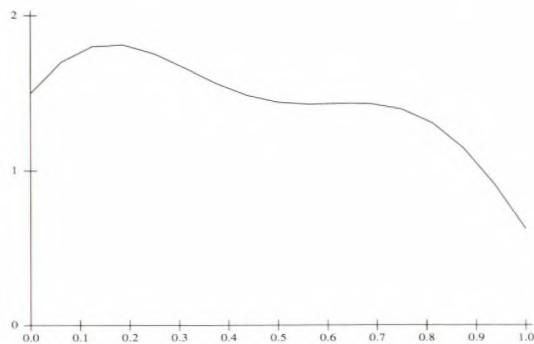
The International Association of Mathematical Physics (IAMP) invites mathematicians and physicists (including students) interested in research in mathematical physics to become members. The Association sponsors a Congress every three years (in 1994 the meeting was held at UNESCO in Paris) and publishes a news bulletin sent to members three times each year. The bulletin includes advertisements of positions in mathematical physics as well as announcements of preprints available in paper or electronic form, as well as other news of the activities of the Association. One special advantage of membership is steep dis-

counts on personal subscriptions to several journals and on certain books, including Communications in Mathematical Physics and Letters in Mathematical Physics. Dues are quite modest (now \$20/year, payable in different currencies). New PhD's sponsored by two members will be inscribed for their first year of membership without fee. Applications for membership can be obtained from the Secretary: Professor Aubrey Truman, Department of Mathematics, University of Swansea, Singleton Park, Swansea SA2 8PP, GB; E-mail a.truman@swansea.ac.uk

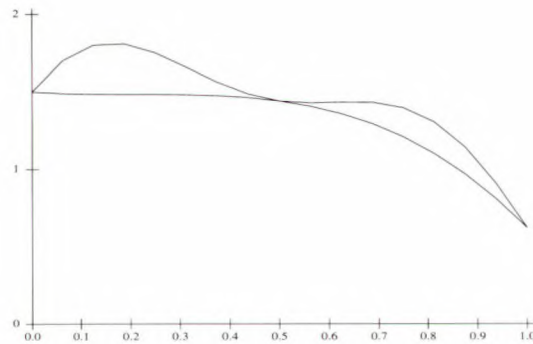
Arthur Jaffe, President

Den ny integralapproximation, (30), svarer til, at vi over et interval, $]a_{\nu-1}, a_{\nu}[$, med midtpunkt c_{ν} , bruger approximationen

$$\frac{h}{6} (f(a_{\nu-1}) + 4f(c_{\nu}) + f(a_{\nu}))$$



Funktion



Trediegradsapproximation

Denne approximation er genkendelig som *Keplers tønderregel* efter Johannes Kepler (1571–1630), som i 1615 i sin berømte bog, *Stereometria doliorum vinorum*, brugte den til måling af indholdet af et halvfylt vinfad, eller som *Simpsons formel* efter Thomas Simpson (1710–1761), der nævner den i en lærebog. Tanken er simpelthen den, at for givne tre punkter, e.g., $-1, 0, 1$, har vi de givne funktionsværdier, y_{-1}, y_0, y_1 , samt i midtpunktet værdien af funktionens afledede, y'_0 . Nu tænker vi os, at vi har lagt et polynomium af tredje grad gennem punkterne, så det har afledet i 0 lig med funktionens:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ p'(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \end{aligned}$$

Når vi integrerer polynomiet fra -1 til 1 , får vi jo

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \left[\alpha \frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3} + \gamma \frac{x^2}{2} + \delta x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \beta + 2\delta \quad (31)$$

Vi behøver altså kun at finde β og δ . Da $p(0) = y_0$, har vi åbenbart $\delta = y_0$. Sætter vi $x = \pm 1$, får vi ligningerne

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= y_1 \\ -\alpha + \beta - \gamma + \delta &= y_{-1} \end{aligned}$$

Lægger vi sammen og indfører $\delta = y_0$, får vi $2\beta = y_1 + y_{-1} - 2y_0$. Indsættes disse værdier i (31), får vi integralapproximationen for et interval af længde 2:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \frac{y_1 + y_{-1} - 2y_0}{3} + 2y_0 = \frac{y_1 + y_{-1} + 4y_0}{3} \quad (32)$$

Korrigeres til skridtlængden h , fås (30).

Vi kan gøre det samme igen, halvere skridtlængden og beregne K_3 . Ud fra K_2 og K_3 kan vi så forbedre approksimationen til Keplers tønderregel, $K_2^1 = \frac{1}{3} (4K_3 - K_2)$, hvis fejl er af størrelsesorden $\frac{h^4}{16}$. Også her gælder det, at koefficienterne til hhv. h^4 og $\frac{h^4}{16}$ er den samme. Så vi kan eliminere disse led og få en fejl af størrelsesorden h^6 i stedet for, ved at approksimere med

$$K_1^2 = \frac{16K_2^1 - K_1^1}{15}$$

Har vi ved successiv halvering af skridtlængden dannet approximationerne $K_1, K_2, \dots, K_n$, kan vi danne et mønster af approximationer efter opskriften:

$$K_j^i = \frac{2^{2i} K_{j+1}^{i-1} - K_j^{i-1}}{2^{2i} - 1} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n-i \quad (33)$$

Vi kan overskueligt skrive dem i et trekantet mønster, hvor meningen er, at man først beregner approximationerne i søjlen til venstre, derefter ved hjælp af (33) udregner de øvrige, altid ved hjælp af værdien til venstre og den ovenover:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_1 & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 K_2 & \rightarrow & K_1^1 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 K_3 & \rightarrow & K_2^1 & \rightarrow & K_1^2 & & \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 K_n & \rightarrow & K_{n-1}^1 & \rightarrow & K_{n-2}^2 & \cdot \cdot \rightarrow & K_1^{n-1}
 \end{array} \quad (34)$$

Når vi har elimineret alle leddene i summen, når vi til approximationen K_1^{n-1} , hvis fejl bliver

$$\frac{|B_{2n}|}{(2n)!} \cdot \frac{h^{2n}}{3 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (2^{2(n-1)} - 1)} \cdot (b-a) |f^{(2n)}(\xi)| \quad (35)$$

For små værdier af n kan vi jo regne koefficienten ud, og for store værdier kan vi for det første vurdere nævneren i den anden brøk ned til



Active gauges er et nyt koncept til vakuummåling. Målehovedet indeholder hele elektronikken til måleudstyret og kræver derfor kun en standard DC strømforsyning. Udgangssignalet er 0 - 10V DC. Udlæsningen kan foregå på et almindeligt måleinstrument, PLC eller på en computer. Derved er der bedre mulighed for dokumentation ved f.eks. produktionskontrol. Fordelen ved denne konstruktion er bl.a., at man ikke behøver at have målehoved og måleudstyr i nærheden af hinanden. Kabler kan leveres i længder på op til 100 meter.

Pris pr. målehoved fra kr. **2.540,-** ex. moms

EDWARDS

Rotationsvakuumpumpe type RV er en ny oliepumpe, som både er en et- og to-trins pumpe, da der er mulighed for med en drejeknap at øge luftgennemstrømningen. Denne mulighed er der ingen andre vakuum-pumper på markedet der har. Pumpen leveres i 4 størrelser 3,7 - 5,8 - 9,7 - 14,2 m³/h.

Edwards RV pumper er velegnet som kemipumpe til f.eks. geltørring, centrifugering og frysetørring. Er også velegnet til rene systemer, hvor der kræves lavt sluttryk. I laboratoriet vil man også påskønne det meget lave støjniveau på kun 48 dBA.



Buch & Holm A/S

Marielundvej 36 - 2730 Herlev ☎ 42 91 75 11 Fax 44 92 31 00

$$3 \cdot 15 \cdots (2^{2(n-1)} - 1) > 2 \cdot 2^3 \cdots 2^{2n-3} = 2^{(n-1)^2} \quad (36)$$

for det andet benytte den ovenfor nævnte approximation,

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} \simeq \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \simeq \frac{2}{40^n} \quad (37)$$

Indsættes (36) og (37) i (35), fås fejlvurderingen:

$$\frac{2h^{2n}}{40^n 2^{(n-1)^2}} \cdot (b-a) |f^{(2n)}(\xi)| = \frac{h^{2n}}{10^n 4^n 2^{n(n-2)}} \cdot (b-a) |f^{(2n)}(\xi)| = \frac{h^{2n}}{10^n 2^{n^2}} \cdot (b-a) |f^{(2n)}(\xi)| \quad (38)$$

Hvis vi nu for eksempel vil beregne π med 10 decimaler, altså med en fejl, der højst er 10^{-12} , kan vi jo approximere integralet

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2v}{1+tg^2v} dv = \pi \quad (39)$$

Vælger vi nu skridtlængden $h = \frac{1}{4}$, ser vi, at for $n = 4$ bliver fejlen (35) af størrelse

$$\begin{aligned} \frac{|B_8|}{8!} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot (1-0) |f^{(8)}(\xi)| &= \frac{1}{30 \cdot 40320 \cdot 65536 \cdot 2835} \cdot |f^{(8)}(\xi)| = \\ &= \frac{|f^{(8)}(\xi)|}{224737099776000} \simeq 10^{-14} \cdot |f^{(8)}(\xi)| \end{aligned}$$

Med brug af (38) er det derimod hovedregning. Fejlen vurderes ved

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8}{10^4 2^{16}} \cdot |f^{(2n)}(\xi)| = \frac{|f^{(2n)}(\xi)|}{10^4 2^{32}} \simeq 10^{-13} \cdot |f^{(2n)}(\xi)|$$

idet vi blot har benyttet, at $2^{10} = 1024 \simeq 10^3$.

Udføres beregningerne i skemaet ovenfor, fås

$$\begin{array}{ccccccc} 3.131176470588 & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ 3.138988494491 & \rightarrow & 3.141592502459 & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ 3.140941612041 & \rightarrow & 3.141592651225 & \rightarrow & 3.141592661143 & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 3.141429893175 & \rightarrow & 3.141592653553 & \rightarrow & 3.141592653708 & \rightarrow & 3.141592653590 \end{array}$$

Til sammenligning er tabelværdien $\pi = 3.14159265358979$.

Denne metode til at forbedre integralapproximationen er fra 1955 og kaldes *Romberg integration* efter Werner Romberg (1909–).

Teknikken til elimination af fejl af lav orden er, som det også fremgår af eksemplet, langt mere økonomisk end den banale, at forbedre værdien ved successive halveringer. Romberg integration har ikke alene stor praktisk betydning ved integralberegninger, men ideen er videreudviklet af Josef Stoer (1934–) og Roland Bulirsch (1932–) i 1971 til den hidtil bedste metode til numerisk løsning af differentilligninger.



Mogens Esrom Larsen er redaktør af matematikken i KVANT. Han er ansat som lektor ved Københavns Universitet.

Indmeldelse i Dansk Fysisk Selskab

Navn/Name: _____
Adresse/Address: _____
By/City: _____
Telefon/Telephone: _____
Telefax: _____
E-mail: _____

- ☐ 75 kr./år junior-medlemmer, studerende, ph.d. studerende
☐ 325 kr./år ordinært medlem
☐ 75 kr./år pensionist medlem

Vedlæg ikke penge med denne indmeldelse.

Indsendes til:

Allan H. Sørensen
Institut for Fysik og Astronomi
Århus Universitet
Ny Munkegade
8000 Århus C.

Kontingenter

Ordinært kontingent andrager 325 kr. årligt, mens kontingent for studerende og pensionerede medlemmer beløber sig til 75 kr. På DFS' generalforsamling 3. juni 1994 blev det besluttet, at kontingentet for Ph.D.-studerende fra og med 1995 sættes til studentertakst, altså 75 kr. pr. år. Det årlige gebyr for individuelt EPS-medlemsskab beløber sig til 250 kr. (prisen er 58 Sfr.; under hensyntagen til den aktuelle vekselkurs, er der foretaget en mindre justering af krone-beløbet i forhold til tidligere).

Når man skifter medlemskategori skal dette meddeles Bjarne Andresen, Ørsted Institut-tet, Universitetsparken 5, 2100 København Ø. Indberetning, der så vidt muligt bedes foretaget i god tid inden udsendelse af kontingentopkrævning (februar), kan foretages pr. post, pr. fax på nr. 3532 0460 eller pr. e-mail på adressen: andresen@fys.ku.dk

Henvendelser vedrørende allerede indbetalt kontingent bedes rettet til Allan Sørensen, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet, 8000 Aarhus C (fax: 8612 0740, e-mail: ahs@dfi.aau.dk).

Vejledning for forfattere

Redaktionen af KVANT modtager meget gerne artikler fra læserne. Indholdet af artiklerne bør være forståelig for personer med interesse for fysik – således at en god gymnasieelev vil få noget ud af at læse artiklen. Illustrationer til artiklerne er meget velkomne.

Det er håbet, at der vil komme en række rubrikker – der er allerede en debatside, som er åben for indlæg om alt hvad der rører sig om fysik. Bladet vil også bringe meddelelser fra Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse, ligesom omtale af arrangementer, der kan have interesse for fysikinteresserede vil blive bragt. Da der kun kommer fire numre om året skal der gives meddelelse om et givet arrangement i god tid, hvis det skal kunne komme med i bladet. Redaktionen vil også stræbe efter at kunne bringe korte notiser med friske nyheder og anmeldelser af bøger af interesse for fysikere.

Vejledning i udformning af artikler til KVANT

For at lette produktionen modtages artikler helst på elektronisk facon. Det kan enten være som elektronisk post til e-mail adressen

kvant@nbivax.nbi.dk

eller (hellere) på en DOS-formatteret diskette, der sendes til

KVANT
c/o Mads Hammerich
Gersonsvej 40
2900 Hellerup

eller afleveres til et redaktionsmedlem sammen med eventuelle figurer, og – *meget vigtigt* – et billede og en præsentation af forfatteren, i stil med de præsentationer,

der findes i slutningen af hver artikel i dette nummer.

Teksten kan være skrevet i L^AT_EX, som ren ASCII fil, i WordPerfect eller Word. De første formater foretrækkes.

Formler og specielle symboler kan indsættes i teksten med L^AT_EX eller T_EX. De modtages dog under alle omstændigheder også gerne på papir.

Illustrationer og billeder til artiklerne afleveres separat – det er (endnu) en kvalitetsmæssig fordel at indsætte disse i artiklen på sædvanlig facon. Undlad venligst at afsætte plads til dem i teksten, men placer figurforklaringen til sidst eller for sig selv.

Tabeller og opstillinger ønskes som simple opstillinger med tabulatorer. Brug ikke for megen energi på at lave “snedige” opstillinger med linier og lignende, men vis gerne på papir hvordan du selv ville foretrække det.

- Forfatternavne skrives med kursiv.
- Afsnitoverskrifter skrives med fed skrift.
- Der er ingen tomme linier mellem afsnit, men de indledes med en indrykning (tabulering).
- Referencer anføres i teksten med et løftet ciffer, og anføres til sidst i artiklen med nummer, forfatter, artikel (eventuelt bind-nummer med fed skrift), sidetal og årstal i parentes.
- Husk et billede og en kort præsentation af forfatteren.
- Forfattere der skriver i L^AT_EX kan rekvirere en skabelon, at skrive i, hos redaktionen.

Abonnement på KVANT

koster 135 kr for en årgang og vil blive opkrævet pr. giro. Nye abonnenter vil modtage eventuelle tidligere numre af den løbende årgang. Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse vil modtage bladet som et medlemsblad.

Hvis du mener at du har abonnement, men ikke får bladet – har du nok glemt at melde flytning af bladet hos dit lokale postkontor, eller måske har du ikke betalt. Bemærk at flytning af KVANT skal meddeles postvæsenet eksplicit!

Abonnement tegnes ved at skrive til

Lene Körner, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø, e-mail: koerner@math.ku.dk

JOINT
EUROPEAN
TORUS

