

KVANT December 4 2009

Tidsskrift for Fysik og Astronomi 20. årgang

TEMA: VIDENSKAB & KUNST

- DEN GODE STEMNING
- ÅND OG STOF – FYSIK OG KUNST
- MATEMATIK ER MALERKUNST UDEN PENSEL
- METTE HØST – BILLEDKUNSTNER PÅ NIELS BOHR INSTITUTET
- LEONARDO DA VINCI – KUNSTNER OG VIDENSKABSMAND
- GÖDEL, ESCHER, BACH – ET EVIGT GYLDENT BÅND
- KVANT-NYHEDER

Løssalgspris: 45 kr

KVANT

Tidsskrift for Fysik og Astronomi

c/o Niels Bohr Institutet
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø

Hjemmeside : www.kvant.dk
E-mail : kvant@kvant.dk

Udgives af

Astronomisk Selskab,
Dansk Fysisk Selskab,
Dansk Geofysisk Forening,
Selskabet for Naturlærens Udbredelse,

Redaktion

Michael Cramer Andersen (ansv. red.),
Christianshavns Gymnasium
Katrine Facius,
Rysensteen Gymnasium
Torsten Freltoft,
Sophion Bioscience A/S
Mogens Esrom Larsen,
Institut for Matematiske Fag, KU
Sven Munk (nyhedsredaktør)
John Rosendal Nielsen (nyhedsredaktør),
Aurehøj Gymnasium
Lone Djernis Olsen (KIF)
Jens Olaf Pepke Pedersen,
DTU Space
Finn Berg Rasmussen,
Ørsted Lab, Københavns Universitet
Svend Erik Rugh

Abonnementspris : 165 kr/år.

Kvant udkommer 4 gange årligt og er medlemsblad for de udgivende selskaber. Henvendelser vedr. abonnement til forretningsfører Lene Körner tlf. 35 32 07 62 (koerner@kvant.dk).

Annoncepriser

1/1 side: 3600 kr, 1/2 side: 2400 kr
1/4 side: 1600 kr.

Priserne er excl. moms og for reprojekteret materiale i farver. Henvendelser om annoncer til redaktøren, tlf. 22 67 26 42.

Oplag: 2400. Tryk: HCB Tryk ApS, Brønderslev. ISSN 0905-8893



Produktionsplan

Nr. 1-10 udkommer ca. 15. marts
Nr. 2-10 udkommer ca. 15. maj
Deadline for mindre bidrag og annoncer er ca. en måned før, længere artikler skal modtages to måneder før.

Indhold:

I grænselandet mellem videnskab og kunst <i>Svend Erik Rugh og Michael Cramer Andersen</i>	3
Mette Høst – Billedkunstner på Niels Bohr Institutet <i>Svend Erik Rugh og Mette Høst</i>	4
Den gode stemning. I. Om veltemperering af keyboard <i>Jens Ulrik Lefman</i>	8
Leonardo da Vinci – kunster og videnskabsmand <i>Michael Cramer Andersen</i>	14
Planetkalender for København 2010 <i>Martin Götz</i>	18
Stjernehimlen <i>Michael Cramer Andersen</i>	19
Ånd og stof – Fysik og kunst <i>Christian Skeel, Morten Skriver og Clive Ellegård</i>	20
Matematik er kunst uden pensel, kunst er matematik uden kridt <i>Henrik Jeldtoft Jensen</i>	25
KVANT-nyheder <i>Sven Munk og John Rosendal Nielsen</i>	32
Gödel, Escher, Bach – Et evigt gyldent bånd <i>Torsten Freltoft</i>	34
Foreningsnyt – foredrag i foråret	35
Large Hadron Collider er tilbage <i>John Rosendal Nielsen</i>	Bagsiden



Billedet på forsiden viser et udsnit af billedkunstner Mette Høsts billede, der repræsenterer de 8 forskningsgrupper på geologi og geografi ved Københavns Universitet. Billedet rummer mange af de strukturer mennesket og naturen skaber – byer, mineraler, floder osv. Det kan ses i sin helhed (6 × 1,60 m) på Geocentret i København og i artiklen (på side 4) om Mette Høsts erfaringer med at samarbejde med fysikere på Niels Bohr Institutet.

KVANT udsendes gratis til alle landets gymnasier, seminarier og HTX-kurser med velvillig økonomisk støtte fra fysikinstitutterne på Danmarks Tekniske Universitet samt Københavns, Syddansk, Aalborg og Aarhus Universiteter.

I grænselandet mellem videnskab og kunst

Af Svend Erik Rugh og Michael Cramer Andersen, KVANT

Dette er et indledende temanummer om "videnskab og kunst", som giver eksempler på tanker, der ligger i grænseområdet mellem fysik/videnskab og kunst. Temanummeret er ment som en start på – og inspiration til – en serie artikler om emnet som Kvant håber at kunne bringe i senere numre. Der er nogle karakteristiske fællestræk mellem videnskab og kunst, men også væsentlige forskelle. Vi nævner nogle eksempler.

Nogle fællestræk mellem kunst og videnskab:

- Både kunstnere og fysikere skaber 'universer' med visse regulariteter, f.eks. sprog med 'love' og 'regler'. I et godt kunstnerisk projekt kan der være skabt et helt 'univers' der er blevet bygget op med konsekvens, logik, og indre (nødvendig) sammenhæng. På den måde er kunst grundforskning i 'mulige universer'. Dygtige kunstnere har ofte opbygget flere – højst forskelligartede – universer. Både i videnskaben og i kunsten kan disse universer indbyrdes modsige hinanden. Det er f.eks. i fysikken velkendt at generel relativitetsteori og kvantemekanik kun lader sig forene med yderste vanskelighed.
- De har begge en nysgerrighed over for det vi ikke ved. De søger ud i ukendte territorier og går på opdagelse i mulighederne inden for visse rammer – der dog nogle gange må overskrides. I både kunstneriske og videnskabelige syslerier er det vigtigt 'at fastholde et åbent felt af nysgerrighed'. De opererer begge på grænsen af sprogets muligheder og udtrykskraft – og opfinder nye sproglige udtryk osv. Et videnskabeligt eller kunstnerisk værk indgår dog ofte i en sammenhæng med referencer til andre værker.
- Som så mange af menneskets aktiviteter tager de grundlæggende udgangspunkt i menneskets sanser og er således (tilsyneladende) afhængige af hvordan vore sanser er konstruerede. F.eks. lever hunde i en radikalt anderledes konstrueret 'duftverden', og i deres 'kunst' ville dufte formentlig spille en langt større rolle end for mennesket.
- Begge har dog bevæget sig langt væk fra det direkte møde mellem mennesket og naturen i kraft af den voksende mængde teknologi vi omgiver os med. Dette 'teknologiske filter' har forstærket begge aktiviteter som det bl.a. ses i astronomernes teleskoper, partikelfysikernes acceleratorer eller moderne arkitektur og musik- og filmproduktion.

Nogle forskelle mellem kunst og videnskab:

- Videnskabsfolk har en slags forpligtelse til at søge og fortælle 'sandheden', som de nu bedst ser den, mens der ingen sådan forpligtelse er for en kunstner.
- Kunstneren har i mindre grad end videnskabsmanden pligt til at 'forklare sig' eller 'forsvare sig', f.eks. i

en offentlig debat. Mange kunstnere har dog af egen lyst – i en offentligt tilgængelig form, f.eks. essays, – reflekteret over aspekter af deres projekter. Men der findes også kunstnere, som ikke ønsker at kommentere eller diskutere deres kunst. Et sådant synspunkt er tilladt i kunsten, men ikke i videnskaben. En fysiker har f.eks. en pligt til at kunne redegøre for sit sproglige udtryk og sin teori, nærmest ned til mindste detalje.

Det er Kvants idé – dels gennem artiklerne i dette temanummer og dels i senere artikler – at belyse sådanne (og andre) ligheder og forskelle mellem disse to hovedområder af den menneskelige aktivitet, og hvordan de kan berige hinanden. Udover at undersøge grænseområdet mellem videnskab og kunst, ønsker Kvant også at gå på opdagelse i fysikers forestillingsverdener. Den moderne fysik omhandler ofte svære abstrakte 'fysiske objekter' og 'begreber' som *ikke kan indfanges i dagligdags billeder*, idet disse objekter og begreber indgår som dele af større teorier – her tænker vi jo ikke mindst på kvantemekanikken – som opfører sig på stærkt kontraintuitive måder, meget fjernt fra dagligdagens fænomener. Denne vanskelighed førte til Niels Bohrs berømte – og ofte citerede – 'billedforbud'.

Alligevel indgår 'det visuelle' i de forestillinger som vi udvikler som fysikere (selvom det kun i begrænset omfang viderekommunikeres i det som præsenteres som videnskab) og vi vil vove den påstand, at man nok indfanger noget rigtigt hvis man siger at: "Vi fysikere prøver i fysikken *at tænke korrekt i forkerte billeder*"!

Fysikere prøver – og kan ikke lade være med – at opbygge intuitive billeder og mønstre, også af det meget kontraintuitive. Som et vigtigt element i at opbygge denne intuition gafler fysikeren sig gradvist ind på hvor disse forestillingsbilleder er forkerte, og hvor de er delvist rigtige ved (delvist) at lede tanken i en rigtig retning.

Lad os til slut bemærke, at elegante kunstneriske symboler kan have stor kraft til at udtrykke komplicerede idéer i videnskaben. F.eks. fandt Niels Bohr at yin-yang symbolet på smukkeste vis – i en enkel kunstnerisk figur – illustrerer et væsentligt træk (komplementaritet) ved naturbeskrivelsen i kvantemekanikken. Ligesom symbolet i kunstnerisk form kan illustrere komplementære modsætningsforhold mellem begrebspar udenfor kvantemekanikken. Et eksempel kunne være at universets naturlove både kan ses som 'et fængsel' og som en kilde til 'frihed'. Naturlovene udgør et 'fængsel' (som vi og alt andet ikke kan undgå at adlyde) og samtidigt muliggør naturlovene 'livet', som i menneskelige livsformer har udviklet en fornemmelse af 'frihed'.

Mette Høst – Billedkunstner på Niels Bohr Institutet

Af Svend Erik Rugh, KVANT og Mette Høst

Vi vil i denne artikel kort beskrive nogle eksempler på arbejdsprocesser, tanker og billedresultater fra Mette Høsts samarbejde med fysikere på Niels Bohr Institutet.

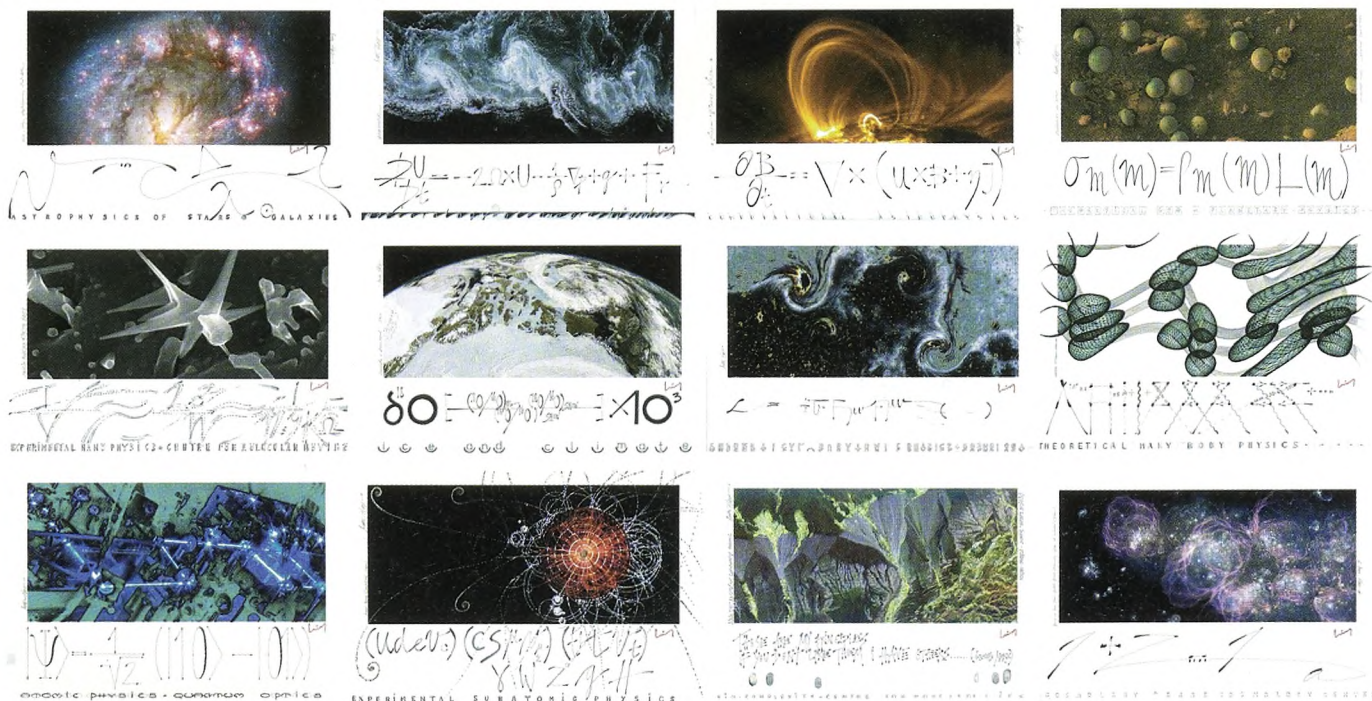
Mette Høst kommer fra en professionel baggrund som billedkunstner. Hun har altid været interesseret i fysik og astronomi og opsøgte – nogle år tilbage – Niels Bohr Institutet for at komme i dialog med fysikerne. Uden at have en på forhånd fastlagt agenda som hun gerne ville "bevise" men snarere med et ønske om at være åben, lyttende og spørgende i sin dialog med videnskabsfolkene. Et af idealerne er (som Niels Bohr engang bemærkede) at starte fra et udgangspunkt af "uvidenhed". Mette har i sit samarbejde med videnskabsfolk på instituttet erfaret at der er et stort behov for at diskutere og undersøge det visuelle betydning – både i den måde vi snakker sammen på og videregiver information men også i betydningen af at kunne skabe nye billeder i forbindelse med de forskellige forskningsområder. Flere universiteter i verden har kunstnere (såkaldte 'artist in residence') tilknyttet, og store amerikanske universiteter som f.eks. MIT har en hel afdeling for kunst og videnskab.

Claus Emmeche, der er leder af Center for Naturfilosofi og Videnskabsstudier, var den første Mette kom i dialog med da hun ville prøve at komme i kontakt med fysikerne på Niels Bohr Institutet. Claus Emmeche mener at, "det er vigtigt at der er nogle 'lommer' på instituttet. En lomme kan både opfattes som en 'cul-de-

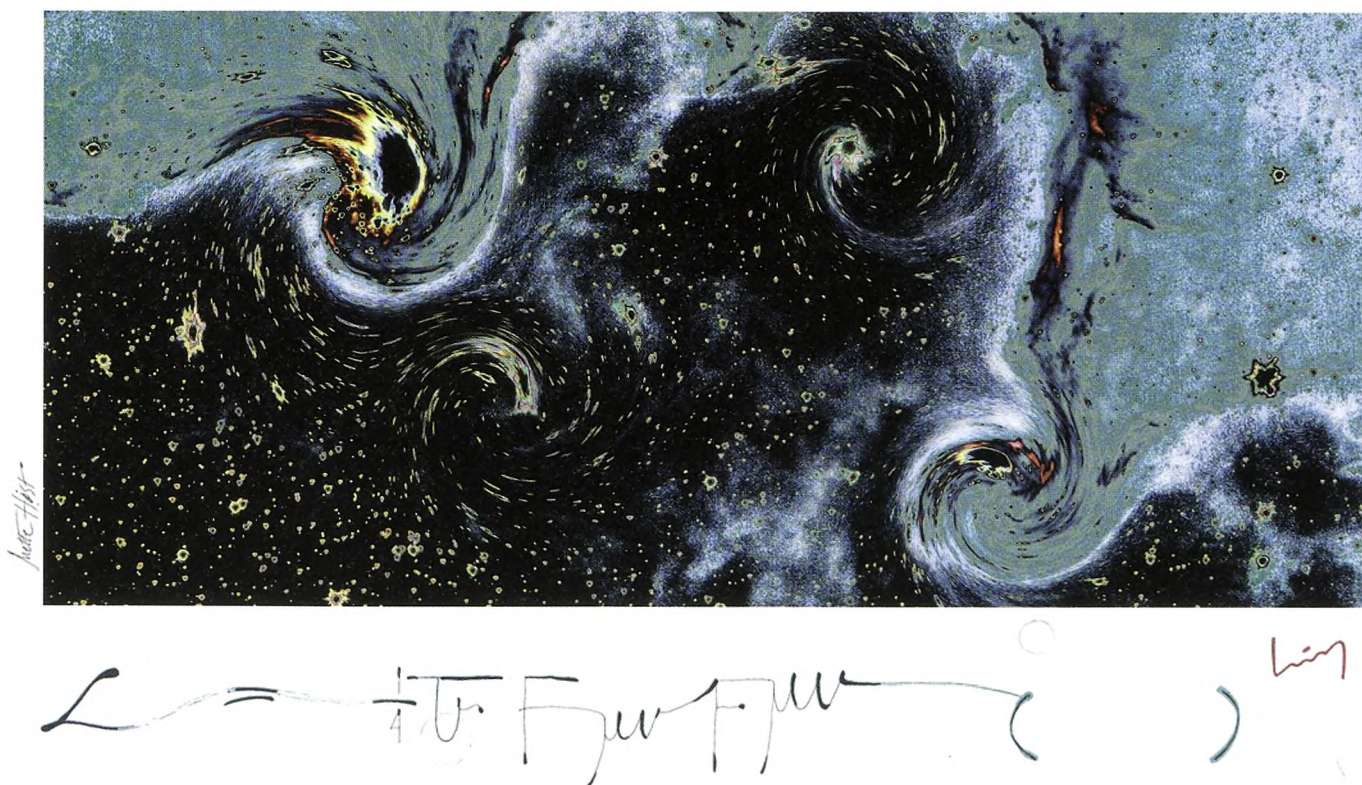
sac', en blindgyde, og som et ormehul, som tillader nye ting at løbe igennem og dukke op, uden for de strikt disciplinære og disciplinerede tilgange til forskning". Projektet er beslægtet med på hvilken måde vi i videnskaben betjener os af "metaforer", et emneområde som Claus Emmeche og mange andre folk der færdes omkring Centeret for Naturfilosofi er interesseret i at undersøge.

Jens Bang (netop afdød docent emiritus på NBI, tidl. medarbejder til Niels Bohr) sagde til Mette da hun var startet på instituttet: "Nu må du ikke blive for skuffet, at du ikke kan beskrive kvantemekanikken i billeder!" og Mette svarede: "Jens Bang: Det lader jeg mig ikke afskrække af... det er lidt den samme opgave som billeder, poesi, og litteratur er på når de prøver at beskrive kærlighed..."

I et af de første projekter på NBI diskuterede Mette med hver enkelt af de 12 forskningsgrupper som findes på NBI. Sammen med forskningsgruppen forsøgte hun at indfange en essens af gruppens forskningsområde i et enkelt billede. På hvert af de resulterende 12 billeder (figur 1) er der tillige under billedet – som kaligrafi – skrevet en formel, som knytter sig til forskningsområdet.



Figur 1. 12 billeder der illustrerer et aspekt af forskningsfeltet for hvert af Niels Bohr Institutets 12 forskningsgrupper. Billederne hænger i deres oprindelige størrelse i Niels Bohr Institutets kantine og i vandrehallen på HCØ. NBI kalenderen 2008 har billederne i et reduceret format på ca. halv størrelse. Billederne vil kunne ses i større format (end de små vist ovenfor) på [2].



Figur 2. Billedet for gruppen “teoretisk partikelfysik og kosmologi”.

Som et lunefuldt sammentræf er antallet af måneomløb om Jorden på et år jo også 12 så det var muligt at de 12 billeder kunne indgå i en kalender med et billede for hver måned og det blev til Niels Bohr Institut kalenderen 2008.

I figur 2 er vist en større version af et enkelt af de 12 billeder ovenfor, og det er opstået i diskussion med forskere i partikelfysik og kosmologi. Billedet er oprindeligt et foto af stjerner i universet. Mette Høst har bearbejdet billedet, så det udtrykker spændvidden mellem kosmologien – det største i universet, og partikelfysikken ned til de mindste elementarpartikler, superstrengte og fluktuationer i selve tidens og rummets geometri.

Holger Bech Nielsen fortalte Mette om “anti-rød” i partikelfysikken og Mette ville tage det som en udfordring at få det med i billedet. Da Holger senere så billedet og spurgte: “Hvor er det anti-røde?” svarede hun, at det måtte Holger selv finde som en billedrespons på den umulige opgave¹.

Den formel der er skrevet på billedet (et bidrag til bevægelsesligningerne for felterne) har en extra tom parentes () efter sig. “Det er så der er plads til alt det som partikelfysikerne ikke har fundet ud af endnu...” fortæller Mette. Endvidere: “Ligesom kinesisk

og japansk kaligrafi har et navn med et rødt stempel placeret i nederste højre hjørne af billedet har alle de 12 billeder en lille rød signatur nederst til minde om Niels Bohr.”

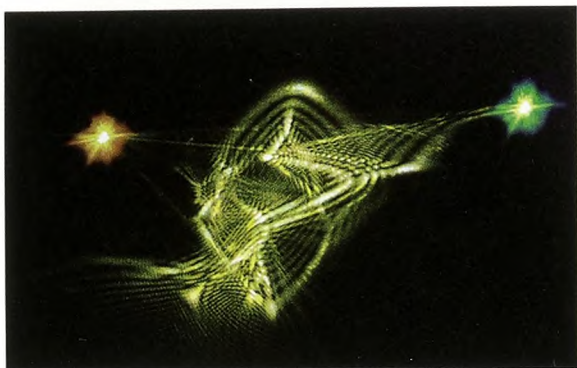
Prikken henviser til historien om hvordan Bohr ændrede ordet ‘harmony’ til ‘uniformity’ ved at sætte en lille prik over ordet ‘harmony’². Det lille symbol på hvert af de 12 billeder markerer, at Niels Bohr grundlagde og opbyggede instituttet og lagde grunden til de 12 forskningsgrupper, som Mette har lavet billeder sammen med.

Mette har samarbejdet med Eugene Polzik og hans gruppe om at illustrere et kvantisk teleportations eksperiment der blev publiceret i tidsskriftet *Nature* (5. oktober 2006), og illustrationen blev bl.a. publiceret i *Scientific American* [3] og *Der Spiegel*. Det var en spændende proces at diskutere og fornemme hvad der

¹Det er vores tanke – i et kommende nummer af Kvant – at undersøge og udfordre fysikerens tænkemåde og forestillinger m.m. i en række samtaler med Holger Bech Nielsen – f.eks. angående nogle af Holgers billedlige forestillinger af de fysiske fænomener m.m., og hvordan man kan og ikke kan tænke i disse billedforestillinger.

²Se f.eks. s. 213 i “Niels Bohr – Hans liv og virke fortalt af en kreds af venner og medarbejdere” (J.H. Schultz forlag. København 1964). I samme artikel skriver A. Pais s. 210 om Niels Bohr: “Han forklarede, hvorledes han altid måtte nærme sig ethvert nyt problem fra et udgangspunkt af komplet uvidenhed”.

sker imellem det enkelte atom og en foton i teleportationsprocessen og Mette fortæller: “Eugene Polzik måtte spænde sin intuitive bue og beskrive fænomenet udenfor matematikkens sprog og jeg måtte spænde mine objektive registrerende muskler til det yderste. Så uden at vi kunne forstå den andens felt kunne vi sammen kigge på et fænomen for derefter at skabe et billede af teleportation der gav mening både videnskabeligt og kunstnerisk” (figur 3).

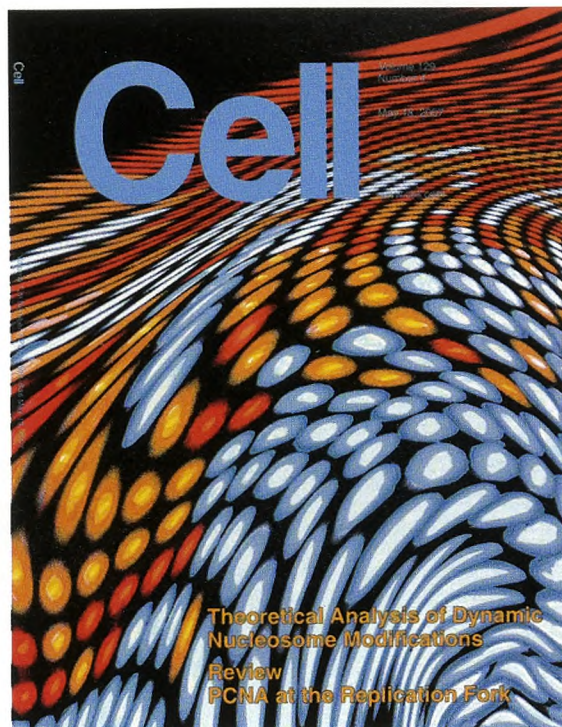


Figur 3. Entanglement (Kvantisk sammenfiltrethed).

Diskussionerne kommer ofte til at inddrage “alle midler”. Ikke mindst alle mulige dagligdags genstande i rummet omkring og i os, herunder vores sanser... for at oversætte den abstrakte og ofte kontraintuitive fysik til dagligdags fænomener ved at etablere referencepunkter til “ting og situationer” som vi forstår i forvejen. Mette fortæller: “Kunstneren er igennem sit arbejde trænet i at tænke på tværs af begreber, tid og rum og at forbinde højst forskellige ting, der tilsyneladende ikke er forbundne, at se sammenhænge mellem tilsyneladende usammenhængende fænomener og det er med til at skabe nye vinkler.”

Mette har også arbejdet sammen med biofysik gruppen på Niels Bohr Institutet, herunder Kim Sneppen og hans gruppe. Der blev bl.a. arbejdet med illustration af en artikel (om mulige mekanismer til hurtige ændringer i arvematerialet) som skulle publiceres i tidsskriftet *Cell*. Det endelige billede (figur 4) vandt (ud

af 12 forslag) og kom på forsiden af bladet *Cell* (18. maj 2007). Kim Sneppen fortæller: “Vi legede en hel masse med illustrationer, også for at fange og tænke over dynamik, strømme af information og dets samspil med fastholdelse af hukommelse i levende systemer. Vi endte op med en rum-tids illustration der viste en streng af nukleosomer mange gange, i efterfølgende tidsbilleder, således at man kunne se ændringer. Vi lod det rum-tidslige billede bølge, også for at illustrere ‘epigenetiske landskaber’. Alt i alt en masse inspiration fra både os og Mette, sat sammen af Mette.”³



Figur 4. Kunstnerisk fortolkning af en simulering af nukleosomers vekselvirkning på forsiden af tidsskriftet *Cell* (18. maj 2007).

Et af Mettes seneste billeder er det billede som (i beskåret form) er forsidebilledet på dette nummer af *Kvant*. Det er malet til Geocentret i København.



Figur 5. Billedet repræsenterer de 8 forskningsgrupper på geologi og geografi. Geocentret, 6 × 1,60 m, olie på print og træ.

³En række af biogrupperns forsøg (og flere forslag af Mette til billedforsider) er på hjemmesiden: <http://cmol.nbi.dk/models/epigen/>

Mette fortæller om billedet (figur 5), "Jeg har prøvet at indfange de lineære og ikke lineære strukturer mennesket og naturen skaber...(byer, mineraler, floder osv.), og man kan godt tolke billedet således at mennesket er underlagt naturen på den måde byen er placeret i billedet men samtidig går der broer fra byen til naturen hvilket mennesket skaber i både direkte og indirekte betydning".

Et af de nye projekter Mette er blevet involveret i er at lave en række workshops på Ålborg Universitet hvor målet er at give de deltagende forskere nogle værktøjer til at kunne visualisere og skabe billeder med udgangspunkt i deres egen forskning. Derigennem kan de udvikle nye idéer og skabe mere nuancerede kommunikationsværktøjer til at inddrage det visuelle i deres daglige forskningsarbejde og præsentere visuelle elementer i deres forestillingsverdener til andre forskere.

Mette er p.t. på besøg i Tomas Bohrs gruppe på DTU, der arbejder med biofysik, komplekse systemer og væskers dynamik på institut for fysik; Et forskningsområde der bl.a. undersøger forskellige væskestrømninger i dagligdags simple eksperimenter hvor det er en udfordring at finde simplificerede matematiske modeller. Der håber hun på at en kunstnerisk angrebsvinkel vil være med til at skabe nye indsigter gennem anderledes spørgsmål og dermed bidrage til at opdage ting og fænomener som er egentlig videnskab, snarere end en kunstners fortolkning af videnskaben. Det er nemlig ikke alle forskningsfelter som hun tror at hun har chance for at bidrage til med noget egentligt videnskabeligt, "Det skal være forskningsområder der ikke alt for matematisk funderede. Det kræver en tilstrækkelig fagekspertise at stille korrekt sproglige og matematiske spørgsmål men netop denne fagekspertise giver de 'blinde' vinkler". Så hvordan kan man stille helt nye spørgsmål – uden at kende sproget? Udfordringen er, at få kunstneren og fysikerens viden til at være komplementære til hinanden så der kan dannes en synergieffekt, der kan belyse nye sider af den forskning man kigger på sammen.

Men Mette mener også at der er ligheder i forskerens og kunstnerens arbejdsbetingelser. Både kunstnere og fysikere skaber universer der er blevet bygget op med konsekvens, logik og sammenhæng. Både videnskab og kunst er "en dans" mellem at vide noget så tilstrækkeligt længe at man kan arbejde med det, men ikke så længe at det begynder at binde en og blive en mental plovfure der kan være svær at komme ud af. Det siges

ofte at gode idéer kommer 'tilfældigt' – men her er det vigtigt at blive opmærksom på hvorledes man kan øge sandsynligheden for at disse 'tilfældigheder' kan opstå? De mentale, psykiske og fysiske rammer er vigtige og man skal prøve at skabe nogle omgivelser der stimulerer fremkomsten af nye idéer. Og hvad der udgør sådanne omgivelser er individuelt. Det er derfor vigtigt at hver enkelt person bliver bevidst om de fysiske og mentale rammer der øger denne sandsynlighed for sig selv.

Det er ikke altid at det er når vi ser direkte på tingene at vi ser dem tydeligst. Nogle gange skal vi lade tankerne finde deres egne veje imens vi går, plukker bær eller foretager os andre dagligdags ting sammen, så idéerne kan komme fra "siden" og overraske os mens vi mindst venter det.

Litteratur

- [1] Mette Høsts hjemmeside, www.artistinresidence.dk
- [2] Mette Høsts seneste arbejder, galleri.artistinresidence.dk
- [3] Teleportationsartiklen og billedet i *Scientific American*, <http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=first-teleportation-betwe>
- [4] Andre projekter indenfor kunst og videnskab, <http://www.asci.org>



Svend Erik Rugh har en ph.d. i teoretisk fysik (med Holger Bech Nielsen som vejleder) og har også studeret filosofi og musik. Er lektor på Rødovre Gymnasium og har bistået ved undervisning i videnskabsfilosofi på Københavns Universitet (NBI). Har diverse forskningsprojekter om forskellige emner på grænsen mellem fysik og filosofi.



Mette Høst

Den gode stemning¹ I. Om veltemperering af keyboard

Af Jens Ulrik Lefmann, Birkerød Gymnasium og DTU

Fra renæssancen udvikler den europæiske musik sig fra at være udpræget melodisk i sin karakter til at benytte harmoniske virkemidler. Flerstemmighed og treklange med tertser træder ind og afløser middelalderens kvinter og kvarter. Dette går hånd i hånd med indførelse af nye stemninger for keyboardinstrumenter. *Middeltonestemning* afløser *pythagoræisk stemning*, og herved tilgodeses en forskønnelse af durtreklange. Antallet af tonearter og akkorder er dog begrænset til det halve af det, vi råder over i dag. Senere i barokken går man over til *klassiske, veltempererede* stemninger, som tillader brug af alle tonearter. Indbyrdes er disse klassiske tempereringer ret beslægtede. Til gengæld adskiller de sig væsentligt fra den *moderne, ligesvævende* temperering. Anvendelsen af de klassiske tempereringer strækker sig helt frem til omkring år 1900, hvor den moderne, ligesvævende stemning bliver standard. En forståelse af de klassiske tempereringers fælles karaktertræk kan give ny forståelse af den klassiske musiks virkemidler og følelsesmæssige tilknytning til tonearter.

Det er en misforståelse at tro, at man i forbindelse med tilblivelsen af J. S. Bachs *Das Wohltemperierte Klavier* (WTK) fra 1722 (bind 2 fra 1742) havde indført den moderne, ligesvævende stemning for keyboard. Det er også en udbredt opfattelse, at de stemninger, man anvendte dengang, var ufuldkomne forsøg på at nå frem til at mestre den moderne, ligesvævende stemning. Tværtimod fastholdt man helt op til slutningen af det nittende århundrede klassiske tempereringer ([1], Introduction), som gjorde alle tonearterne *anvendelige*, men *forskellige*. Man møder også den opfattelse, at Bach med WTK1+2 ville vise, at alle 24 tonearter var "lige gode", men tværtimod udstiller værket tonearternes forskelligheder som musikalsk materiale. Kun få kender i dag lyden af de oprindelige tempereringer, men i digitalklaverets tidsalder kan vi igen blot ved at trykke på en knap komme til at lytte os ind i tonearterne, som de fremstod op gennem det 18. og det 19. århundrede. Fx fremstod tonearter med få fortegn særligt *harmoniske*, mens tonearter med mange fortegn var særligt *melodiske*. Hver toneart fik sin helt egen karakter, og komponisters valg af toneart var lige så bevidste som en billedkunstners valg mellem granit, marmor eller bronze. Hvis man ikke har hørt fx Bach, Mozart eller Beethoven fremført med de stemninger, de er skabt i, svarer det til kun at have set fotos af Michelangelos Maria. Eller tro, hun var støbt i hvid akryl i stedet for hugget ud af marmor. I den længere version [2] vises, hvordan Bach netop arbejder med tonearternes forskellighed og hvordan fx Mozart og Beethoven skifter mellem tonearter og bevidst fremkalder farvekontraster, der blegner i vores moderne, ligesvævende stemning ([3], side 73). Musiklivet er i vor tid mere historisk orienteret end nogensinde. Næppe tidligere har musikere specialiseret sig i at spille ældre musik i det omfang, vi kender i dag. Det er uomgængeligt, at man ved fremførelse,

fortolkning og oplevelse af ældre musik må forholde sig til tidskløften mellem musikkens tilblivelse og nutiden. Den historiske kikkert kan forvrænge, forstærke, overse eller fremhæve på godt og ondt. Op gennem det tyvende århundrede er den klassiske musik blevet fortolket med tykke, senromantiske briller. Siden har *Early Music* bevægelsen tilbageerobret musikken med sin overbevisende slanke lyd, adrætte tempobehandling og artikulation. Her har ny fremførelsespraksis sammen med klassisk temperering tilmed givet farverne tilbage til den grånende, klassiske musik.

Terminologi

Jeg benytter navnet B for tonen H og Bb i stedet for B. *Lysere* tone betyder højere frekvens, *mørkere* tone betyder lavere frekvens. Med mindre andet nævnes, bruges ordet *terts* i betydningen durterts eller stor tert, altså fire halvtonetrin (i modsætning til molterts eller lille tert, som er tre halvtonetrin). *Klassisk musik* betegner den europæiske musik fra perioden 1700 - 1900 (fra midt i barokken til senromantik og impressionisme). *Keyboard* anvendes som fællesbetegnelse for alle tasteinstrumenter som clavecin, clavichord, virginal, spinet, cembalo, hammerklaver, harmonium, orgel, klaver, flygel, og digitalklaver. (Ikke mindst som en hyldest til det moderne digitalklaver, der med få klik kan skifte mellem de 7-8 vigtigste historiske stemninger og dermed giver let adgang til at lytte og sammenligne).

Frekvensforhold, stamtone

For to toner er det alene frekvensforholdet $x = f_2/f_1$ som er bestemmende for hvilket interval, vi oplever mellem tonerne. To andre toner med samme frekvensforhold opfattes altså som samme interval. At vores tonesansning fungerer sådan, er i sig selv en kilde til undren, se senere artikel i KVANT eller [2]. Samtidig er det forklaringen på, at man kan høre en melodi i først

¹ Artiklen findes i en mere omfattende udgave på EMU [2]. Forfatteren har holdt en række foredrag om emnet, blandt andet på DTU, RUC og UNF med demonstrationer af klassiske stemninger på digitalklaver. Med en række eksempler fra Bach, Mozart og Beethoven diskuteres komponisternes pointer med valg af toneart. Anden del (II. Høresansens fysik og tonal musikalitet) kommer i et senere nummer af KVANT.

én toneart og derefter i en anden toneart – og alligevel opfatte det som samme melodi! Når en tones frekvens fordobles, sanser vi tonen som oktaven over. Den nye tone opleves så beslægtet med den første, at vi ligefrem giver den samme navn (det dybe C, det høje C etc.). Det er i sig selv et tankevækkende forhold, der tages op senere [2]. To frekvenser f_1 og f_2 kaldes ækvivalente (eller oktavækvivalente), dersom $f_2 = 2^n f_1$ for et passende helt tal n . Vi giver toner samme navn netop hvis deres frekvenser er ækvivalente i denne forstand, fx kalder vi alle toner med frekvenserne 55 Hz, 220 Hz, 440 Hz og 1760 Hz for A. Enhver af disse toner siges at være en repræsentant for stamtonen A, idet vi ved en *stamtone* forstår en klasse af ækvivalente toner.

Den moderne stemning

Vores tonesystem er i dag indrettet sådan, at en oktav er inddelt i 12 lige store trin, kaldet halvtone-trin. Man møder tit spørgsmålet om, hvorfor man har valgt at inddele en oktav i netop 12 trin. Man kunne jo vælge at inddele oktaven i q trin, så hvert trin får en frekvensfaktor $2^{1/q}$. For at opnå en god tilnærmelse til $3/2$ (en kvint) med p af sådanne trin, skal $2^{p/q}$ være tæt på $3/2$. Med andre ord skal p/q være tæt på $\log(3/2)/\log(2)$. Nu er $p/q = 7/12$ et godt bud; den relative afvigelse er ca. $-2,8 \cdot 10^{-3}$. Man kan prøve med et større tal i nævneren for at se, om man kan komme tættere på med et passende valg af tæller. Det viser sig, at ingen brøker giver bedre tilnærmelse, før man kommer op på $q = 41$. (Se [2] for nærmere diskussion). Først når vi kommer til tallet $24/41$, får vi en bedre tilnærmelse til $\log(3/2)/\log(2)$. Den relative afvigelse er nu nede på ca. $-6,9 \cdot 10^{-4}$. Det betyder, at man skal inddele oktaven i 41 trin, og derefter bruge 24 trin som kvinten for at få en bedre tilnærmelse end før. Nu er kædebrøksalgoritmen en særdeles effektiv metode til at beregne den optimale rationale talfølge af *kædebrøkskonvergener* ([4] s. 20 eller [5], kapitlet "Continued fractions"). Jeg anfører et par af talfølgens elementer (for nærmere forklaring, se [2])

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \dots \rightarrow \frac{\log(3/2)}{\log 2} \quad (1)$$

Heldigvis giver vores valg af 12 trin, at alle toneintervallerne ligger tæt på de klassiske rene intervaller, hvorimod anvendelse af 41 trin kan give os en lidt renere kvint i 24 trin, men til gengæld også et fuldstændig uoverskueligt klaviatur med en lang række meget fremmede intervaller. (En yderligere forbedring fås først, når man vælger at inddele oktaven i 53 trin. Næste skridt er 306 trin – ikke nogen attraktiv vej at gå!)

Oktaven over en tone har frekvensfaktoren 2. Hvis man lader g betegne frekvensfaktoren for ethvert halvtone-trin, får vi ligningen $g^{12} = 2$, som har løsningen $g = 2^{1/12}$. Dette irrationale tal er ikke konstruerbart i euklidisk geometrisk forstand. Beslægtet hermed er det klassiske – uløselige – problem om terningens fordobling; tallet $g^4 = 2^{1/3}$ er netop frekvensfaktoren

for en terts. Det har i musikhistorien givet spekulationer over, hvordan man for en lut eller en guitar i praksis skulle anvise en tilnærmet geometrisk konstruktion af gribebrættets inddeling i bånd ([6] s. 49-55). Det klassiske problem om umuligheden af at konstruere sidelængden for en terning med det dobbelte rumfang af en given terning er beskrevet i [7] og [8].

Toneafstand i cent

Man har indført et logaritmisk afstandsmål for toner, sådan at et halvtoneinterval måler 100 cent i den moderne stemning. En moderne terts er 400 cent, en moderne kvint er 700 cent og en oktav er 1200 cent. Afstanden i cent mellem to toner med frekvenser f_1 og f_2 er givet ved formlen

$$I(1, 2) = 1200 \text{cent} \cdot \log_2(x) = 1200 \text{cent} \cdot \frac{\log x}{\log 2} \quad (2)$$

hvor $x = f_2/f_1$ er frekvensforholdet. Når det drejer sig om stamtoner, kan man regne modulo 1200 cent. Således svarer to kvinter til $700 + 700 = 1400 \equiv 200$ cent, altså en heltone.

Kvintskridt, pytagoræisk komma og syntonisk komma

Den rene kvint over en udgangstone har en frekvensfaktor $3/2$. Hvis vi holder os til blot at tale om stamtoner, kan vi lige så godt sige frekvensfaktor 3. Aritmetikens fundamentalsætning fortæller, at ethvert rationalt tal på entydig måde kan opløses i primfaktorer. Derfor kan en potens af 3 ikke også være en potens af 2, og derfor vil vi aldrig kunne komme tilbage til samme stamtone efter en række rene kvintskridt. Med 12 rene kvintskridt kommer vi imidlertid tæt på, idet 3^{12} er tæt på 2^{19} . Hvis man starter med det dybeste A på klaveret som udgangstone, vil man efter 12 rene kvintskridt nå til en tone med frekvensfaktor $(3/2)^{12} = 129,7$; dette overskrider 7 rene oktaver $2^7 = 128$ med faktoren $(3/2)^{12}/2^7$ svarende til 23,5 cent, det såkaldte *pytagoræiske komma*.

Den rene terts over en udgangstone har frekvensfaktoren $5/4$, eller slet og ret 5, hvis vi blot taler om stamtoner. Nu giver fire rene kvintskridt en frekvensfaktor $3^4 = 81$, hvorimod den rene terts har frekvensfaktoren $5 \cdot 2^4 = 80$. Det betyder, at toneintervallet fra den rene terts til den pytagoræiske terts har frekvensforholdet $81/80$. Dette interval kaldes det *syntoniske komma*. Det svarer til 21,5 cent og ligger tæt på det pytagoræiske komma.

Den ekstremt lyse durterts i den pytagoræiske skala er hovedårsagen til, at den pytagoræiske skala ikke egner sig til flerstemmig musik, medmindre man holder sig fra tertser.

Middeltonekvinten

I renæssancen kommer det polyfone gennembrud med flerstemmighed og harmoniske virkemidler. Man får derfor smag for den rene terts $5/4$, som er væsentligt lavere end den pytagoræiske terts $81/64$ ([3] s. 19-45). Man indfører en ny stemning, hvor kvinten formindskes

sådan, at fire på hinanden følgende kvinter nu skal give en ren tert. Det fører til ligningen $x^4 = 5$, hvor løsningen $x = 5^{1/4} \approx 1,495$ er frekvensfaktoren for denne nye kvint. Indførelsen af denne irrationale frekvensfaktor er første skridt på vej ned fra antikkens guddommelige idealer (de rationale brøker) for med irrationale tal at tilgodese menneskets sanseverden. Se boks 1.

Boks 1.

Middeltonekvint $5^{1/4} \approx 1,495$:
 $I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(5^{1/4}) \approx 697 \text{ cent}$

Moderne kvint $2^{7/12} \approx 1,498$:
 $I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(2^{7/12}) = 700 \text{ cent}$

Pytagoræisk, **ren** kvint $3/2$:
 $I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(3/2) \approx 702 \text{ cent}$

Afviselserne mellem kvinterne holder sig beskedent inden for 5 cent. Selv et musikalsk trænet øre affinder sig fint med den lave middeltonekvint i bytte for den rene tert i en durtreklang.

Kvinterne afviger i sig selv ikke så meget, men til gengæld bliver der store afvigelser for tertserne, idet en tert jo er fire på hinanden følgende kvinter. Se boks 2. Fra Frederiksborg Slotskirke sælges CD'er med musik spillet på Compeniusorglet fra 1610, som er stemt i middeltonestemning (oprindeligt et verdsligt kammerorgel til dansemusik).

Boks 2.

Middeltone **ren** tert $5/4 = 1,25$:
 $I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent}$

Moderne tert $2^{4/12} = \sqrt[3]{2} \approx 1,260$:
 $I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(2^{4/12}) = 400 \text{ cent}$

Pytagoræisk tert $81/64 \approx 1,266$:
 $I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(81/64) \approx 408 \text{ cent}$

Mellem tertserne ser man altså langt større afvigelser, nemlig 21,5 cent (det syntoniske komma). Bemærk, hvor lav den rene tert er i forhold til den moderne tert!

Det er almindelig kendt, at musikere med baggrund i andre musiktraditioner tager afstand fra vores tonale system. Fx arbejder indiske musikere i langt højere grad med mikrotonalitet og rene intervaller. Tilvænning fra barnsben er nok den bedste vej til at acceptere den vestlige verdens moderne tert.

Den kromatiske cirkel

Vi kan få bedre overblik ved at placere tonerne i den kromatiske skala C, C#, D, Eb, E,... osv. på enheds-cirklen, idet vi starter med C i (1,0) og går mod uret (figur 1 til højre). Vi lader en hel omgang svare til 1200 cent, og derfor svarer en halvtone på 100 cent til 30

grader. I den moderne stemning danner tonerne en regulær 12-kant. En tone med frekvensfaktor x (i forhold til C) vil altså afbildes i et punkt med retningsvinklen $\theta(x) = 360 \cdot \log_2(x)$ (figur 1 til højre).

Bemærk, at $2x$ afbildes i samme retningspunkt som x idet $\theta(2x) = \theta(x) + 360$. To toner afbildes i samme punkt, netop hvis de repræsenterer den samme stamtone. Nu ser vi på, hvordan en uendelig bane af toner a^n (n heltallig som før) placerer sig på cirklen. Vinklen mellem et punkt og det næste er $360 \cdot \log_2(a)$.

Hvis der forekommer gentagelser, altså hvis a^n og a^m (m ligeledes et helt tal) afbildes i samme punkt, så må $a^n = a^m 2^k$ for et passende helt tal k . Det giver os $a = 2^{k/(n-m)}$ og dermed ser vi, at $\log_2(a) = k/(n-m)$ er et rationalt tal. Hvis omvendt $\log_2(a) = p/q$ er et *rationalt* tal, altså $a = 2^{p/q}$, vil banen netop bestå af q forskellige punkter, der danner en regulær q -kant på cirklen (idet vi antager brøken p/q uforkortelig).

Anderledes er det, hvis $\log_2(a)$ er *irrational*. I så fald vil alle banens punkter være forskellige. Disse uendelig mange punkter vil fordele sig tæt i den kromatiske cirkel, i den forstand at ethvert nok så lille buestykke vil indeholde uendelig mange af banens punkter. Et vigtigt "irrationalt" eksempel er sekvensen af pytagoræiske kvinter. Tallet $\log_2(3/2)$ er irrationalt; hvis man nemlig antog $\log_2(3/2) = p/q$, ville man få $3/2 = 2^{p/q}$, eller $3^q = 2^{p+q}$ i modstrid med aritmetikkens fundamental sætning. Derfor ligger de pytagoræiske kvinter tæt, og vi kommer aldrig tilbage til samme stamtone. Et andet vigtigt eksempel er sekvensen af middeltonekvinter, som også vil ligge tæt, idet også $\log_2(5^{1/4})$ er et irrationalt tal (hvilket ses på tilsvarende måde).

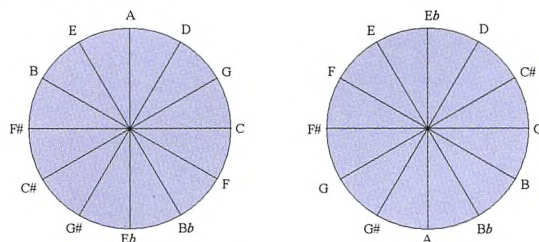
Symmetrier uden betydning

Læseren opfordres til at fortsætte med at gennemtænke tilfældene $a = 2^{p/12}$ for forskellige værdier af p (eller se [2]). Der fremkommer en række symmetriobjekter herunder heltoneskalaen, den formindskede firklang og den forstørrede treklang samt tritonusklangen, en række klange, der vel at mærke ikke har nogen central rolle i den klassiske musik. Og det er netop min pointe: Det er højst usædvanligt, at iøjnefaldende matematiske strukturer ikke indtager nogen fremtrædende rolle. I den klassiske musik er det derimod de asymmetriske strukturer, som dur- og moltreklange samt diatoniske skalaer², der har de centrale roller. Klaviaturet er endda selv asymmetrisk opdelt i hvide og sorte tangenter. Dette forhold antyder, at vores tonesystem og den klassiske musik er fremmede for hinanden. Vi vil da også se, at de fremmede symmetrier forsvinder, når vi vender blikket mod de klassiske stemninger. Anderledes er det naturligvis med senere musikstilarter, genrer som fx impressionisme (tænk fx på heltoneskalaer hos Debussy), tolvtonemusik og jazz, som er stærkt knyttet til den moderne stemning. Udviklingen af den moderne stemning finder sted samtidig med sådanne gennembrud samt den senromantiske frigørelse fra bundethed til enkelte tonearter ([1], Introduction).

²En diatonisk skala i C-dur er alle de hvide tangenter fra C op til C en oktav højere. Den består af hel- og halvtone trin: 1-1- $\frac{1}{2}$ -1-1-1- $\frac{1}{2}$.

Kvintcirklen

Kvintcirklen fremkommer på tilsvarende måde ved at placere tonerne i kvintrækkefølgen C, G, D, A, E, ... osv., idet vi nu lader en vinkel på 1/12 omgang repræsentere 700 cent (i stedet for 100 cent). En hel omgang svarer nu til 8400 cent. I den moderne stemning danner tonerne igen en regulær 12-kant. Rækkefølgen er blot anderledes.

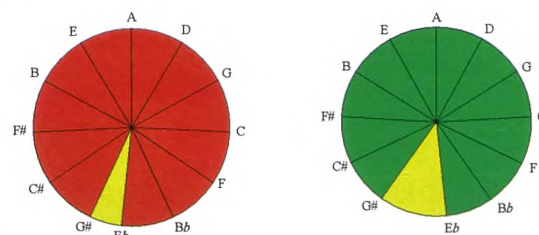


Figur 1. Til venstre: I den moderne stemning er alle kvinter på 700 Cent. Til højre: Alle halvtonespring i den moderne stemning er på 100 Cent.

Syv-reglen. Tænk på en elastik, der er viklet én gang omkring et paprør. Der er afsat 12 mærker med samme afstand på elastikken, så de danner en regulær 12-kant. Nu strækkes elastikken, så den kan vikles 7 gange rundt om paprøret. De tolv mærker danner igen en regulær 12-kant; rækkefølgen er blot ændret. Hvis vi i stedet vikler elastikken 49 gange rundt om paprøret, vil mærkerne atter ligge i den oprindelige rækkefølge! Anvender vi dette på vore tonecirkler, kan vi formulere syv-reglen: Transformationen “gå syv skridt frem” afbilder den kromatiske cirkel på kvintcirklen og omvendt: Hvis man går 7 skridt frem i den kromatiske cirkel, kommer man i alt en kvint op, fx (C, C#, D, Eb, E, F, F#, G). Det virker også den anden vej: Hvis man går 7 skridt frem i kvintcirklen, vil man ende en halv tone højere, fx (D, A, E, B, F#, C#, G#, Eb).

Matematisk set vil den komplekse funktion $f(z) = z^7$ multiplicere argumentet for det komplekse tal z med 7. Vi kan lade vores moderne 12 toner svare til de 12 komplekse enhedsrødder i $z^{12} = 1$. Anvender vi nu f to gange efter hinanden på sådan en enhedsrod, får vi $f(f(z)) = z^{49} = (z^{12})^4 \cdot z = z$, dvs. enhedsrødderne er invariante under f^2 . Det bunder i at $7^2 \equiv 1 \pmod{12}$.

Fire-reglen. Hvis man går fire trin frem kommer man en terts op, og bemærk, at det er uanset om man bruger den kromatiske cirkel eller kvintcirklen. Det hænger sammen med, at for en enhedsrod til $z^{12} = 1$, vil $(z^7)^4 = z^4$.

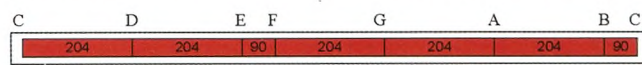


Figur 2. Til venstre: I den pytagoræiske stemning vil de 11 rene kvinter på 702 cent kun have plads til en ulvekvint på 678 cent. Til højre: I middeltonestemningen vil de 11 kvinter på 697 cent skulle suppleres med en ulvekvint på 738 cent.

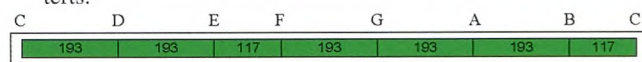
Den pytagoræiske stemning

Den pytagoræiske skala er konstrueret ud fra kvinter, der har en frekvensfaktor på 3/2 gange en udgangstone. Der er 11 rene kvinter på 702 cent, se de røde felter fra Eb til G# på figur 2 (tv). Den resterende kvint på 678 cent er uacceptabelt lav og kaldes derfor “ulvekvint”, se det gule felt på figur 2 (tv).

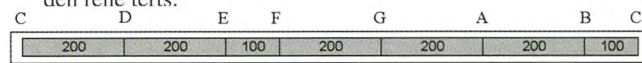
I C-dur bliver alle heltoneintervallerne på 204 cent, idet man skal gå to kvinter frem på figur 2 (tv): $702 + 702 = 1404 \equiv 204 \pmod{1200}$. Heltoneintervallerne CD, DE, FG, GA og AB er altså alle lidt større end vi bruger i dag. De to halvtoneintervaller EF og BC er til gengæld lidt mindre, end i dag, nemlig kun 90 cent. Udregningen fremgår af at trække de 5 heltonetrin fra 1200 cent og dele med 2. Trinstørrelserne i den skala, vi nu får, fremgår af figur 3. Den egner sig vældig godt til melodier, fordi det bliver ganske tydeligt, hvornår der er tale om heltonespring og halvtonespring. Den lille overdrivelse fremmer forståelsen, og melodier fremtræder flottere og mere profilerede. Det lille “ledetoneinterval” BC gør melodier meget lyse. Jeg vil derfor kalde en sådan skala *melodisk*. Til gengæld er den *uharmonisk* pga. den alt for store terts på 408 cent. Alle skalaer og intervalstørrelser i den pytagoræiske stemning findes i [2], appendiks. Der er kun 6 anvendelige tonearter.



Figur 3. Den pytagoræiske Cdur skala. Bemærk den lyse terts.



Figur 4. Cdur skalaen i middeltonestemningen. Bemærk den rene terts.



Figur 5. Den diatoniske Cdur skala i den moderne stemning til sammenligning.

Middeltonestemningen

Denne har elleve lave kvinter samt én “ulvekvint” G#Eb som er uacceptabelt stor, se figur 2 (th). Det giver den samme begrænsning, nemlig at man kun kan anvende seks tonearter. I disse tonearter vil treklange klinge særdeles smukt pga. en ren terts. Jeg vil kalde sådanne tonearter *harmoniske*. Til gengæld vil heltoneintervallerne være noget lavere end vi er vant til (193 cent), se figur 4, mens halvtoneintervallerne er voldsomt store (117 cent). Når man fx går syv kvinter frem fra E til F, kommer man til at inddrage den store ulvekvint. Det giver melodier et slattent udtryk (som fremført af en upræcis sanger eller violinist) og tonearterne kan med rette kaldes *umelodiske*.

Klassisk temperering

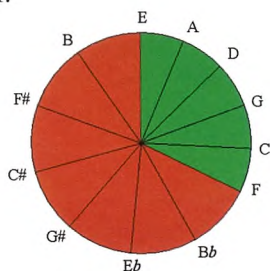
Da det er principielt umuligt at få alle toneintervaller helt rene, ender vi med spørgsmålet om at fordele urenhed på én eller anden måde. I den moderne, ligesvævende stemning fordeles snarset jævnt ud over det hele i et tyndt lag. Der er absolut ingen forskel

på tonearterne; de lyder fuldstændig ens på nær selve tonelejet, ingen er specielt rene eller urene. Det svarer lidt til at have et hus, som ikke kan rengøres, men hvor snavset kan flyttes rundt. Man kan sige, at den såkaldt rene stemning, den pythagoræiske stemning og middeltonestemning er tre forskellige måder at flytte snavset, så der er rent nogle steder og uudholdeligt andre steder. I de *klassiske tempereringer* går man en fjerde vej, idet man gør en dyd ud af snavset: Det er en oplagt idé at kombinere de rene kvinter, som er for store, med middeltonkvinter, som er for små. En stemning er tempereret, når alle tonearter kan anvendes. På Bachs tid forsøgte man sig med at temperere på denne måde. Lad os beregne resultatet af 12 skridt med de forskellige kvinter:

- 12 moderne kvinter $(2^{7/12})^{12} = 2^7 = 128$, hvilket er *præcis* 7 rene oktaver
- 12 rene kvinter $(3/2)^{12} \approx 129,7$, hvilket *overskrider* 7 oktaver
- 12 middeltonkvinter $(5^{1/4})^{12} = 5^3 = 125$, hvilket er *utilstrækkeligt* til 7 oktaver.

Lad os i stedet prøve at kombinere 4 middeltonkvinter med 1 moderne kvint og derpå 7 rene kvinter: Det giver overraskende nok $(5^{1/4})^4 \cdot (3/2)^7 \cdot 2^{7/12} \approx 127,99991 \approx 128,000$, hvilket inden for al ønskelig nøjagtighed netop er 7 rene oktaver!

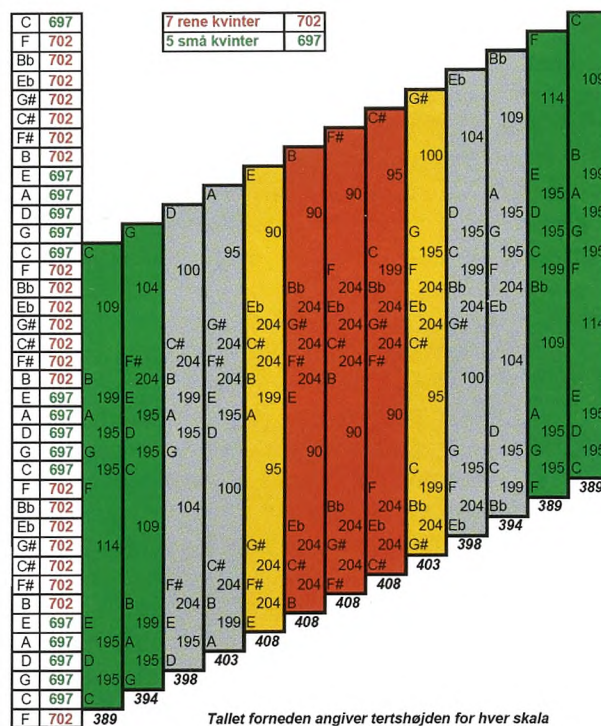
Den stemning, som benytter sig af disse kvintskridt, kaldes Kirnberger III tempereringen efter Johann Kirnberger (elev af J. S. Bach), se figur 6. Dette er blot én af en lang række meget nært beslægtede forslag til at opnå en temperering ved kombination af store og små kvinter. Beslægtede tempereringer bærer navne som Andreas Werckmeister, Thomas Young, Francesco Vallotti, Niedhardt m. fl. Princippet med at kombinere rene kvinter med lave kvinter har holdt sig helt frem til perioden 1895-1905, hvor den moderne, ligesvævende temperering slog igennem og blev standard ([1], Introduction). Dette går hånd i hånd med musikens udvikling væk fra at være toneartsfikseret. I senromantikken bliver musikken mere og mere modulerende grænsende til det nærmest feberagtigt fabulerende. I modsætning til de klassiske tempereringer kan den moderne stemning byde på ensartede heltoneskalaer som egner sig til impressionistisk musik, ligesom tolv-tonemusikken fremstår bedst med tolv fuldstændig ligeberettigede toner.



Figur 6. En klassisk temperering er sammensat af nogle rene kvinter og nogle lave kvinter, som tilsammen udfylder kvintcirklen og gør alle tonearter brugbare.

Konflikten mellem harmoni og melodi

Det er væsentligt at hæfte sig ved denne fundamentale konflikt mellem *harmoni* og *melodi*, en konflikt hvor man altid må vælge side. Antag fx, at man i C-dur skal synge B (læs H!) efterfulgt af C og at B samtidig optræder som terts i dominantakkorden, hvor G er grundtone. Hvis B skal *harmonere* med G, skal det synges mørkt for at få en ren terts GB. Hvis B derimod skal fungere *melodisk* som ledetone til grundtonen C, så skal B synges lyst. Her må man vælge i konflikten mellem at tænke vandret og lodret. Lad os se, hvad det gør for musikens tonemateriale at anvende en klassisk temperering som fx. Kirnberger III (se figur 7). Vi får nogle tonearter, som er udpræget *harmoniske* C-dur, G-dur og F-dur, altså dem med højst ét fortegn. Vi får andre tonearter, som er udpræget *melodiske* E-dur, B-dur, F#-dur og C#-dur, altså dem med mere end fire fortegn. Vi får nogle *mellemtonearter* som D-dur, Bb-dur, A-dur og Eb-dur, altså dem med 2-3 fortegn. Eksempelvis er D-dur karakteriseret ved, at 1. trin i skalaen er meget lille, mens 2. trin er meget stort, hvilket tydeligt udstilles i Bachs prælude i D-dur fra WTK1.



Figur 7. Excel regneark med alle 12 durskalaer i en klassisk stemning med 7 rene kvinter og 5 mindre kvinter (fx Kirnberger III). En søjle viser den diatoniske durskala startende nedefra med grundtonen. Tallene viser springene i heltone- og halvtoneintervaller. De grønne er de udpræget *harmoniske*, de røde er de udpræget *melodiske*. Tallet under hver søjle viser tertsens størrelse. Husk, at der går 7 kvinter til et halvtone trin

Beregning af klassisk temperering og musikeksempler

Beregninger af toneafstand i en klassisk temperering foregår i et regneark, hvor der er valgt størrelser af de 12 kvinter, som til sammen skal give 8400 cent. De diatoniske durskalaer beregnes ved at lægge to

kvinter sammen for heltonespring og syv kvinter for halvtunespring. I Excel kan man med fordel benytte funktionen “=REST(tal;divisor)” til at beregne disse summer modulo 1200. Det giver en oversigt som vist i figur 7.

Bemærk at mellemtonearterne D, A, Eb og Bb minder meget om de moderne. Men fx har Eb og Bb meget store afstande mellem de to øverste toner (ledetoneintervallet). For D-dur er afstanden fra første til anden tone mindre end fra anden til tredje tone - modsat den rene stemning, hvor det er lige omvendt. I Bachs D-dur prælude WTK1 bliver lytteren hele tiden konfronteret med denne forskel; DEF# kommer igen og igen.

Den klassiske musik får de oprindelige farver tilbage, hvis den fremføres med klassisk temperering frem for den moderne. En lang række eksempler i [2] viser, at valget af toneart ikke er tilfældigt, men en del af den støbeform hvori musikken fremstår. Eksemplerne viser hvordan komponister behændigt udnytter tonearternes stærke sider og tager hensyn til deres svage sider.

Litteratur

Litteraturen er ofte modstridende. Ældre udgaver af The Grove Concise Dictionary of Music fremstiller klassiske tempereringer som fejlslagne forsøg på at tilnærme den moderne, ligesvævende temperering. Et væld af bøger har ar fra denne opfattelse, herunder Den store danske encyklopædi. Til et gymnasiebibliotek/studiecenter kan jeg anbefale at anskaffe [3], [4], [9], [10], [11].

Litteratur

- [1] Owen Jorgensen: Tuning. Containing the perfection of eighteenth-century temperament, the lost art of nineteenth-century temperament, and the science of equal temperament, complete with instructions for aural and electronic tuning. East Lansing: Michigan State University Press, 1991.
- [2] Jens Ulrik Lefmann: Den gode stemning, høresansens fysik og tonal musikalitet, www.emu.dk/gym/fag/fy/-inspiration/forloeb/boelger/dengodestemning.html
- [3] Ross W. Duffin: How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care), W. W. Norton & Company 2007.
- [4] Asmus Schmidt: Kædebrøker, Gyldendal 1967.
- [5] Hardy & Wright: The Theory of Numbers, Oxford 1939.
- [6] J. Murray Barbour: Tuning and Temperament – a historical survey, Dover Publication, Inc. 2007.
- [7] Jesper Lützen: Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling, Systime 1993.
- [8] Bjørn Grøn: Fra græsk geometri til moderne algebra, www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/-paradigmatiske/not/n314.doc
- [9] David J. Benson: Music - A Mathematical Offering, Cambridge University Press 2007.
- [10] Hans Buhl: Sfærernes Harmoni, Steno Museets Venner 2000.

- [11] Gareth Loy: Musimathics - The mathematical Foundations of Music, Vol. 1+2, MIT Press 2006.
- [12] Cd'er: Der er et væld af indspilninger med klassisk temperering. Jeg kan anbefale Cd'er med Lars Ulrik Mortensen, cembalist og dirigent for det danske ensemble Concerto Copenhagen. Bachs Das Wohltemperierte Klavier I+II med Zuzana Ruzickova er indspillet på cembalo stemt i Niedhardt temperering fra 1729.
- [13] Glimrende side af Kyle Gann, <http://home.earthlink.net/~kgann/histune.html>
- [14] Godt diasshow, <http://campus.murraystate.edu/staff/-scott.thile/research/unequal/index.htm>
- [15] Om bl.a. Owen Jorgensens TUNING, <http://www.mmdigest.com/Tech/jorgensen.html>

Gode søgeord på nettet: 'Historical tuning', 'mean tone intonation', 'just intonation', 'equal temperament', 'Kirnberger III', 'Werckmeister', 'Francesco Vallotti', 'Thomas Young', 'Niedhardt temperament'.



Jens Ulrik Lefman er lektor i matematik og fysik på Birkerød Gymnasium og ekstern lærer i fysik på DTU. E-mail: ju@birke-gym.dk.

PFEIFFER  **VACUUM**

NYHEDER

- er der ingen af i dette nummer.
Vi nøjes med at ønske vore kunder

**Glædelig jul
&
Godt nytår**

Vi takker alle for året der gik

På gensyn i 2010

Tlf. 4352 3800 Fax 4352 3850
efa@pfeiffer-vacuum.dk

Leonardo da Vinci – kunstner og videnskabsmand

Michael Cramer Andersen, Christianshavns Gymnasium og KVANT

Leonardo da Vinci (1452-1519) bruges ofte som symbol på Renæssancen – den periode i Europas historie, hvor antikkens kunst og videnskab blev genopdaget og medførte en sprudlende kreativitet og åndelig fornyelse. Han fik en alsidig uddannelse som kunstner og forbedrede sin kunst gennem videnskabelige studier af natur og mennesker. Leonardos arbejdsmetode tog udgangspunkt i sanserne og i eksperimenter. Kunst og videnskab gik hånd i hånd i en form for kreativ dualisme, hvor de to erkendelsesformer stimulerede hinanden. Leonardo havde et helhedssyn på naturen, som vi i dag kan lære meget af, men han var også fuld af modsætninger, hvilket var en del af hans metode. Vi skal i denne artikel se eksempler på, hvordan han brugte videnskaben i kunsten og kunsten i videnskaben.

Leonardo – et universalgeni?

Leonardo da Vinci efterlod sig omkring 25 malerier, der regnes blandt de skønneste i verden, f.eks. “Mona Lisa” og “Den sidste nadver”, samt flere tusinde manuskript-sider med utroligt detaljerede tegninger af mennesker, natur og tekniske opfindelser. Tegningen af en mand der er indskrevet i en cirkel og et kvadrat (figur 1) er nærmest blevet symbol på menneskets frigørelse i Renæssancen. Leonardo udmærkede sig som maler, billedhugger, arkitekt, ingeniør og videnskabsmand. Han skrev desuden fabler og var en dygtig musiker, sanger og lyrespiller. Men selv om Leonardo spændte over mange discipliner var han ikke et *universalgeni*. Han interesserede sig således *ikke* for: historie, moral-filosofi, teologi, jura, økonomi, handel, politik, klassisk litteratur eller musikteori [1]. Denne liste rummer stort set alt hvad et ’dannet menneske’, eller en humanist, burde kende til. Derfor blev han kaldt ’en mand uden lærdom’, hvilket han selv bare var stolt af, for det var de praktiske emner der interesserede ham – de ting der kunne studeres med sanserne.

Uddannelse som kunstner

Leonardo voksede op i og omkring landsbyen Vinci, hvor hans nysgerrighed for naturen blev stimuleret. Han lærte at læse, skrive og regne i skolen, men fik ikke nogen boglig uddannelse. Da han som teenager viste fremragende evner indenfor tegning kom han i lære og boede hos en af tidens førende kunstnere, Andrea del Verrocchio i Firenze. I hans værksted lærte han at tegne, male, lave skulpturer samt andre kunsthåndværk. Den unge Leonardos talent indenfor malerkunsten overgik snart mesterens, som aldrig malede igen og Leonardos evne til at lære selv – og lære hurtigt – prægede hans liv. Han skrev, at “Han er en dårlig elev, som ikke overgår sin mester” og i stedet for at kopiere antikke kunstværker fandt han inspiration i naturen – den “sande mester” [1]. Firenze havde ca. 125.000 indbyggere og tiltrak, i kraft af sin centrale placering og århundreders succesrige handel, mange intellektuelle og kunstnere. Da Leonardo kom til Firenze i 1460’erne var domkirkens kuppel, tegnet af Filippo Brunelleschi (1377-1446), bygget færdig. De store innovative maskiner og stilladser fra byggeriet tiltrak tidens førende ingeniører [2] og må også have stimuleret Leonardos

interesse for mekanik. Leonardo var med til at fremstille den gigantiske kobberkugle på toppen af domkirkekuplen, der satte kronen på værket. I byens hektiske aktivitet smeltede natur og kultur sammen hos Leonardo. På trods af en opvækst som uægte barn fik han gennem arbejdet en kæmpe selvtillid og satte sig for at yde væsentlige bidrag. Leonardo lærte først latin efter han var fyldt 30 år. Før da kunne han ikke læse de klassiske værker selv, men hørte om dem mundtligt i brudstykker og han lærte om Aristoteles gennem Dantes italienske digtning. Men Leonardo startede ofte sine studier fra en frisk og undersøgte tingene selv fremfor at stole på gamle autoriteter. Som maler var han desuden mere visuelt og praktisk orienteret end bogligt.

Højdepunkter i Leonardos liv

1452-1466 Vinci. Leonardo fødes den 14. april lidt nord for Vinci, 27 km vest for Firenze i Italien. Moderen forlader faderen, som gifter sig flere gange og får flere børn. Leonardo vokser op hos sin far og hans forældre.

1466-1482 Firenze. Flytter til Firenze med sin far, der er notar. I lære i Verrocchios kunstnerværksted. Udlært som mester efter 6 år mod de normale 13 år. Første selvstændige malerier og bestillinger fra kirker og velhavere. Anklages og frifindes for homoseksualitet.

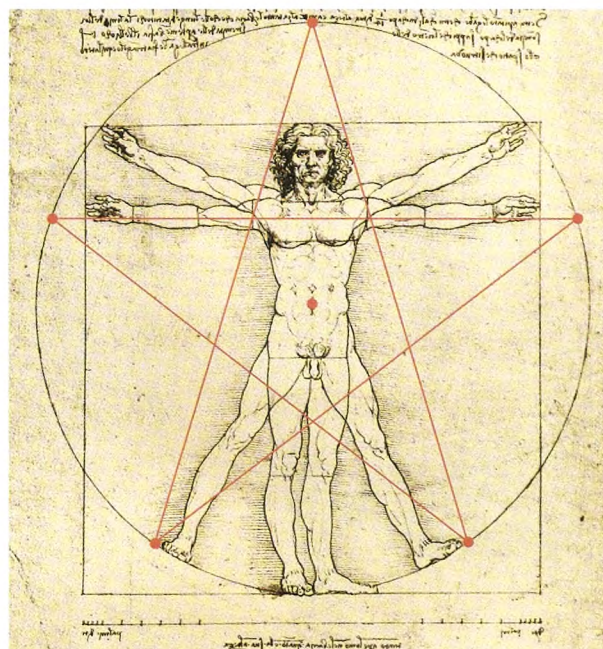
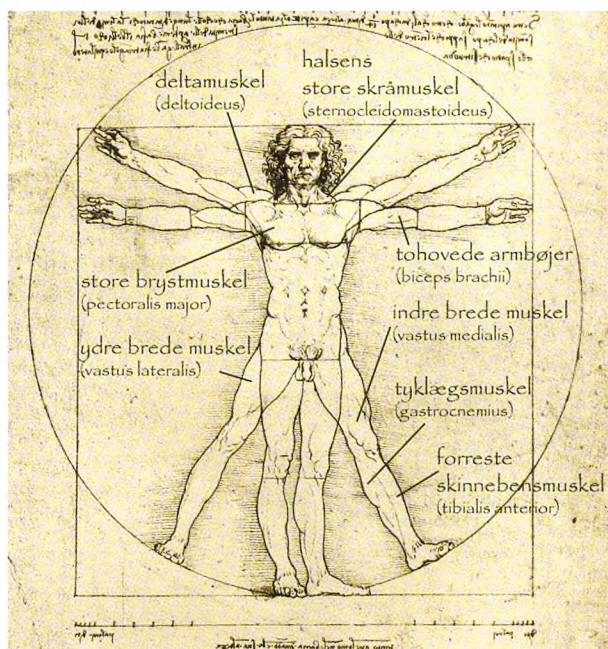
1482-1499 Milano. Forlader Firenze og søger ansættelse hos hertugen af Milano, Ludovico Sforza, som ingeniør, arkitekt, skulptør, maler og musiker. Har eget værksted med lærlinge. Indleder videnskabelige studier i anatomi og hydraulik. Arbejder på en kæmpe rytterstatue og maler *Den sidste nadver* (1495-98). Illustrerer Luca Pacioli's bog *Det gyldne snit* (1498).

1499-1506 Firenze. Rejser rundt og arbejder bl.a. som militæringenieur for Cesare Borgia. Vender tilbage til Firenze 1503, hvor han påbegynder *Mona Lisa*.

1506-1513 Milano. I tjeneste hos den franske guvernør, der har overtaget magten.

1513-1516 Rom. Kommer i tjeneste hos pavens bror, Giuliano de' Medici, og flytter til Vatikanet i Rom. Konstruerer i 1515 en mekanisk løve til fredsforhandlinger i Bologna mellem den franske konge og paven.

1516-1519 Frankrig. I tjeneste hos den franske konge, Frans I. Bor på et landsted nær kongens slot i Amboise nordvest for Paris. Leonardo dør 2. maj 1519 af et hjerteslag, 67 år gammel.



Figur 1. “Menneskets proportioner” – eller “Den vitruvianske mand” – tegnet af Leonardo ca. 1490 og måske et selvportræt. Manden er indskrevet i et kvadrat og en cirkel og med en række klassiske længdeangivelser markeret på figuren og på skalaen nedenunder. Over tegningen står [3]: “Arkitekten Vitruvius skriver i sit værk om arkitektur, at menneskekroppens proportioner af naturen er fordelt sådan: at fire fingre udgør en hånd, og 4 hænder udgør en fod, 6 hænder udgør 1 cubit; 4 cubit udgør en mands højde. Og 4 cubit udgør et skridt og 24 hænder udgør en mand; og disse mål anvendte han i sin arkitektur”. Det er bemærkelsesværdigt hvor præcist anatomen er gengivet, man kan identificere de fleste større muskler (se tegningen til venstre). Pentagrammet har haft stor symbolsk betydning idet enhver linje deler de linjer den skærer i *det gyldne snit*, som ifølge græsk kunst bl.a. beskrev forholdet mellem en persons højde (sidelængden i kvadratet) og højden fra jorden til navlen (radius i cirklen).

Renæssancens idealmenneske

Kunstnerne i renæssancen dyrkede mennesket og forsøgte at beskrive ‘det ideelle menneske’. Når man skal tegne en menneskekrop er det en fordel at kende nogle af afstandene og Leonardo bemærkede, at “længden af en mands udstrakte arme er den samme som hans højde”. Det viser han ved at indskrive en mand i et kvadrat (figur 1). Man kan også finde andre pæne talforhold mellem forskellige afstande på kroppen, f.eks. *det gyldne snit*¹ (figur 1). Leonardo var fascineret af de mange illustrationer af et menneske indskrevet i geometriske figurer (kvadrat, cirkel eller pentagram) som blev trykt i forskellige udgaver af den klassiske arkitekt Marcus Vitruvius Pollios (ca. 75-20 f.Kr.) værk. Mange af tegningerne afbildede mennesket i centrum (symbol på mikrokosmos) og symboler for det astronomiske/astrologiske verdensbillede udenom (makrokosmos). Men Leonardo brød med denne tradition – det er kun mennesket der optræder og med videnskabelig præcision ved hjælp af matematik.

Leonardos malerteknik

Leonardo var fænomenal til at iagttage og gengive det han så, på sine tegninger og malerier. Han udtrykte dette i mottoet, “At tegne er at se”. Han beskrev desuden øjets opbygning og sammenlignede billedannelsen med et ‘camera obscura’ – forløberen for kameraet. Leonardos anbefaling til at tegne et menneske følges endnu i dag af kunstnere [4]: Tegn først efter tegninger af gode mestre. Tegn derefter fra skulpturer og tegninger af

dem. Fortsæt så med gode naturmodeller. Gå altid langsomt til værks og vær kritisk. Leonardo var berømt for sin gengivelse af lys og skygge, en teknik han kaldte “sfumato”, der betyder ‘røgagtig’ (figur 2). Effekten blev opnået ved møjsommeligt at påføre mange spindelvævstynede lag maling. Han arbejdede meget med overgangen mellem lys og skygge og undgik så vidt muligt, at optegne skarpe kanter omkring en genstand.



Figur 2. I midten ses en af Leonardos smukkeste tegninger af en kvinde, som er et studie til englen på maleriet “Madrone i grotten”, der ses i udsnittet til højre. Til venstre ses tegningen med kontrasten forstærket så lys og skygge bliver tydeligere.

Leonardos malerier er berømte for en række kvaliteter: Opfindsomme måder at påføre malingen; detaljeret kendskab til anatomi, lys/skygge, botanik og geologi; gengivelse af følelser med kroppens gestikuleren; originale kompositioner og gådefulde symboler.

Leonardo havde som de fleste kunstnere brug for naturlige forlæg for figurerne i sine malerier og fandt

¹ Et linjestykke $a + b$ der er delt i to linjestykker a og b ($a > b$), som opfylder $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$. Det gyldne snit er $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$.

han en person, som han ville bruge, kunne han følge efter personen en hel dag og tegne vedkommende. Han brugte ofte de samme proportioner i ansigterne og for at huske detaljerne i et ansigt skelnede han f.eks. mellem 10 forskellige næseprofiler og 12 typer næser set forfra. Han øvede sig på personer der lignede karrikaturer, da de var særlig nemme at huske. Hans ry for at have 'fotografisk hukommelse' er derfor snarere udviklet gennem systematisk træning, hvilket hans enorme produktion af tegninger vidner om. Under arbejdet på Nadver-billedet kunne han arbejde uafbrudt en hel dag uden pause. I dagene efter stirrede han på billedet i timevis og kritiserede figurerne for sig selv. Senere kunne han komme og foretage nogle få penselstrøg på en figur og gå igen. Han var udpræget perfektionist.

Videnskab og kunst forstærker hinanden

Én af Leonardos anbefalinger til malere var "Vær sikker på at du kender strukturen i alt det du vil afbilde" [5]. Leonardo-eksperten Kenneth Clark vender det om, "Det siges ofte at Leonardo tegnede så godt fordi han kendte til tingene; det er rigtigere at sige at han kendte til tingene fordi han tegnede så godt", dvs. Leonardos videnskab byggede på hans kunst. Sandheden er nok, at hans evne til at tegne rummede både kunstneriske og videnskabelige elementer og de supplerede og forstærkede hinanden. Ifølge Michael White [6] opstod der hos Leonardo en dualisme mellem kunst og videnskab, da han opdagede at videnskab var vigtig for at forbedre kunsten. Summen af kunst og videnskab er større end begge erkendelsesformer hver for sig.



Figur 3. Kronologi over udvalgte værker af Leonardo. Øverst til højre ses en skitse af hans hjemegn tegnet 1473. Til venstre ses nogle af hans betydeligste malerier. Nederst til højre ses eksempler på videnskabelige tegninger og opfindelser.

Menneskets anatomi – naturens kunstværk

Allerede Leon Battista Alberti (1404-72) pointerede vigtigheden af anatomi, for at gengive mennesker og dyr realistisk. Leonardo skrev, at hvis man ikke kender til menneskets anatomi vil musklerne – særligt på mennesker i bevægelse – ligne en “bunke nødder”, og han kritiserede nogle af sine samtidige kunstnere, bl.a. Michelangelo, for ikke at interessere sig for naturvidenskab. Det hørte med til uddannelsen som kunstner at man overværede dissektion af menneskekroppe og Leonardo var også her empirisk indstillet. Omkring 1490 førte måneders opmålinger af afstande på menneskekroppen til tegningen af “Den vitruvianske mand” (figur 1) – et forsøg på at etablere et videnskabeligt grundlag for malerkunsten, der ellers kun blev regnet for et håndværk. Interessen for anatomi fortsatte med opmålinger af kranier, alle former for muskler og de indre organer. Fra omkring 1510 gik han længere ind i kroppen og nu var det for forskningens skyld og ikke bare til anvendelse i kunstværker. Han forsøgte bl.a. at finde dødsårsagerne. Han gik systematisk til værks og planlagde en illustreret anatomibog med et par hundrede meget detaljerede tegninger, udført på grundlag af studier af 20-30 lig, herunder en gravid kvinde med foster i livmoderen. Enkelte tegninger rummer mange lag og ligner moderne CT-skanninger.

For Leonardo var menneskets anatomi et af naturens største vidundere og en kæmpeudfordring at forstå. Han påpegede at man bedre kunne forstå kroppens bevægelser ved at sammenligne med avanceret mekanik. Knoglerne var de bærende elementer, mens sener og muskler var ligesom snoretræk. Men han var fuldt klar over at kroppen var mere end mekanik og søgte efter fysiske spor af ‘sjælen’. Han konstruerede mekaniske modeller der efterlignede et menneske (soldat i rustning), en løve og en flagermusvinge [7]. Hestens anatomi blev studeret særlig grundigt, da Leonardo modellerede den 7 meter høje “Sforza-rytterstatue”. Han ville overgå sin mester, der var berømt for sin rytterstatue i Venedig. Men projektet blev opgivet da Milano blev invaderet og bronzen brugt til kanoner. Dette nederlag som kunstner kan have medvirket til at flytte fokus imod videnskaben i hans senere år.

Matematik, fysik og astronomi

Leonardo anså matematikken for den fornemste af videnskaberne, men brugte den mest i praktiske anvendelser og kun sjældent som en model af virkeligheden. Han lærte om perspektiv af Verrochio, der havde studeret matematik som ung. Euklids geometri blev studeret med hjælp fra matematikeren og vennen Luca Pacioli, hvis bog om det gyldne snit Leonardo illustrerede. Leonardo var ikke så god til aritmetik, f.eks. tidskrævende udregninger af kvadratrødder. Han udviklede derfor originale geometriske metoder med forskydelige figurer [8] til at bestemme arealer – en forløber for integralregningen – og kom med sit eget bevis for Pythagoras’ sætning.

Gennem sit arbejde med teknik lærte Leonardo om mekanik og sammensatte kræfter og var inde på både

inertiens lov, faldloven [8] og energiens bevarelse. Ved anlægsarbejder og oversvømmelser blev han optaget af væskebevægelser og overførte denne viden til luftbevægelser, som han anvendte i sine studier af flyvning. Leonardos videnskabelige metode byggede på iagttagelser, hvor synet spillede en central rolle. Han eksperimenterede med optik for bedre at forstå lys, som han beskrev som bølger. Leonardo vidste, at man kunne “se Månen stor med to stykker glas” og eksperimenterede med parabolske spejle (til at fokusere lys), men han opfandt ikke teleskopet [6]. Han forklarede Jordens genskin på Månen lige efter nymåne og afviste, at Månen lyste af sig selv. Leonardo opstillede hypoteser om Solens lys og varme, om Jorden og Månen og han beskrev sol- og måneformørkelser. Han skrev “Solen står stille”, måske inspireret af Kopernikus der første gang fremsatte sin heliocentriske teori i 1514. Men Leonardo var ingen astronom – han nævner ikke de store kometer og formørkelser der kunne ses i hans levetid og han foretog ingen systematiske observationer.

Leonardo inspirerer stadig efter 500 år

Leonardo arbejdede empirisk, analytisk og metodisk og udtrykte sine observationer i tegninger og præcis tekst – som en videnskabsmand. Han undersøgte næsten al naturvidenskab og overgav det som en ‘skitse’ til senere generationer [6]. Men han var fundamentalt forskellig fra f.eks. Galilei og Newton, idet han sjældent brugte matematik. En mere direkte arvtager er nok Tycho Brahe, der også arbejdede empirisk og anså kunst for vigtig. Leonardos videnskabelige metode var integreret med kunsten i et helhedsbillede, der minder om moderne systemteori og kompleksitetsforskning [8]. Hans nysgerrighed overfor naturen var umættelig og hans skabertrang kan stadig inspirere både kunstnere og videnskabsmænd i dag.

Litteratur

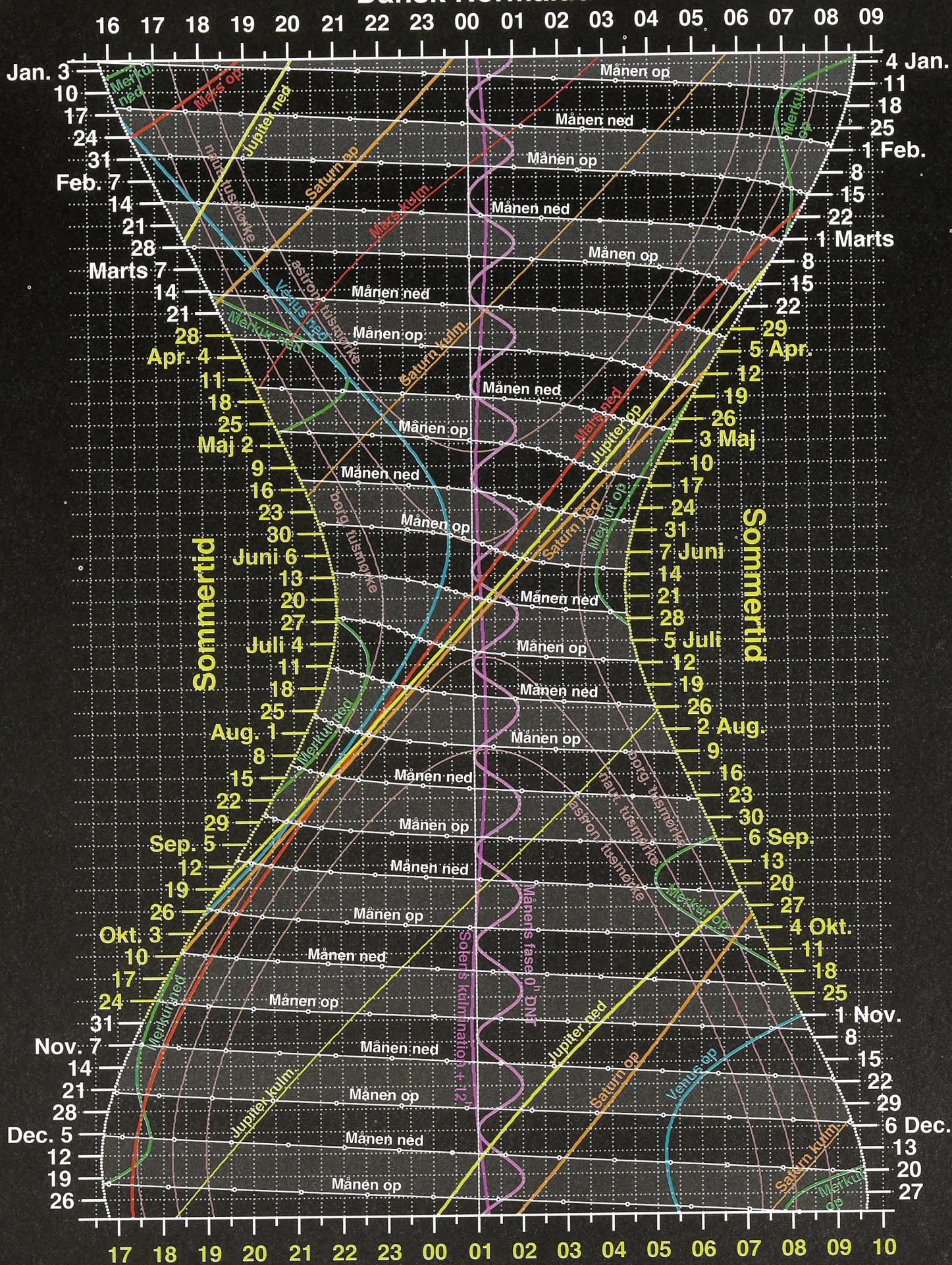
- [1] C. D. O’Malley editor, Leonardo’s Legacy – An International Symposium, University of California Press (1969).
- [2] Paolo Galluzzi (1996), Renaissance Engineers – From Brunelleschi to Leonardo da Vinci, Giunti 1996.
- [3] Redaktion H. Anna Suh (2006), Leonardo da Vinci – Optegnelser, Parragon Books Ltd.
- [4] William Wray (2005), Leonardo da Vinci – In His Own Words, Arcturus.
- [5] Michael J. Gelb (2005), Lær at tænke som Leonardo da Vinci, Borgen.
- [6] Michael White (2000), Leonardo da Vinci – The First Scientist, Abacus.
- [7] Mario Taddei (2007), Leonardo da Vinci’s Robots, Leonardo3 Italy, <http://www.leonardo3.net>.
- [8] Fritjof Capra (2007), The Science of Leonardo, Doubleday.
- [9] God webside med Leonardos tegninger, www.UniversalLeonardo.org.



Michael Cramer Andersen underviser i fysik og astronomi i gymnasiet og er redaktør af KVANT. Hans faglige interesser er koncentreret omkring kosmologi og videnskabshistorie og han har været fascineret af Leonardo da Vinci i mere end 20 år. I baggrunden af billedet ses Leonardos fødehjem udenfor Vinci, fotograferet på en studietur i 2008.

Planetkalender for København 2010

Dansk Normaltid



Stjernehimlen



Stjernehimlen
den 15/1 kl. 0.00

Månens faser



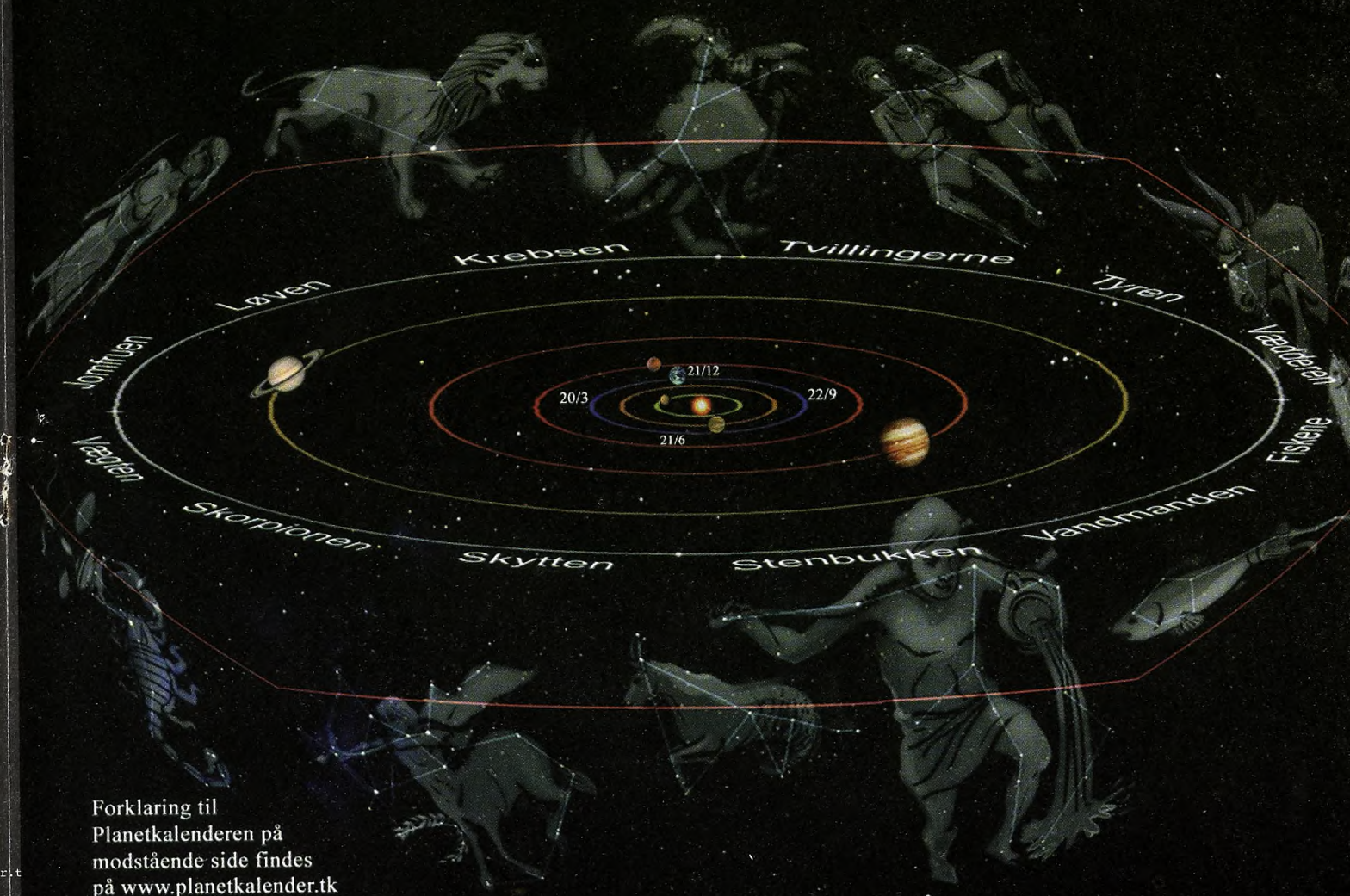
På *morgenhimlen* ses Venus (indtil 11/1) og Merkur (efter 4/1).
På *aftenhimlen* ses Mars, Jupiter, Saturn og Venus (efter 11/1).

Solsystemet ca. 15. januar

Kun planeter synlige med det blotte øje er vist nedenfor.
Udenom planetbanerne ses Dyrekredsens 12 stjernebilleder.
Den røde streg markerer Ekliptika - Solsystemets baneplan.

Astronomiske begivenheder

- 21/12 Vintersolhverv
- 31/12 Partiel måneformørkelse fra 19.52 til 20.54
- 4/1 Stjerneskydssværmen *Bootiderne* kulminerer
- 15/1 Ringformet solformørkelse, ikke synlig i Danmark.
- 20/3 Forårsjævndøgn



Forklaring til
Planetkalenderen på
modstående side findes
på www.planetkalender.tk

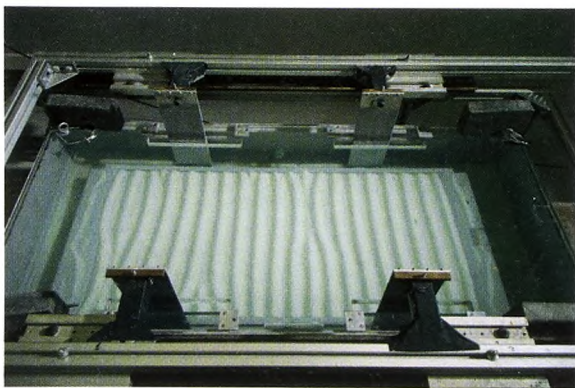
ÅND FYSIK + KUNST STOF

Af Christian Skeel, Morten Skriver og Clive Ellegård

Videnskabens ambition er, med fuldkommen objektiv præcision, at skille verden ad i dens enkelte dele, for at forstå hvordan de virker sammen. Kunsten forsøger derimod at samle verden i aldeles subjektive og flertydige udsagn. Kunsten og videnskaben repræsenterer to komplementære sider af menneskets væsen. I en udstilling på Esbjerg Kunstmuseum har vi forsøgt at forene kunstmuseet med templet og det videnskabelige laboratorium.

Interferens

Egentlig begyndte vores samarbejde ved et tilfælde. Christian Skeel og Morten Skriver (S&S) fik i 2004 en opfordring fra Esbjerg Kunstmuseum til at lave en udstilling, der skulle forbinde billedkunst og naturvidenskab. Et par år tidligere havde S&S på en rundtur på Niels Bohr Institutet set et af Clive Ellegårds (CE) sandrille eksperimenter (figur 1), der stod midlertidigt anbragt i en kældergang under instituttet. Forsøgsopstillingen skilte sig ud fra de øvrige apparaturer, som fyldte laboratorier og gangarealer, ved selv at udgøre et billede. Sammenstillingen af det tekniske præcisionsudstyr og en organisk bølget sandbund dannede et ejendommeligt poetisk udsagn om mødet mellem videnskabens analytiske blik og naturens mystik. Eksperimentet var også tydeligt på andre måder. Selv om en beskuer ikke vidste præcis, hvad det gik ud på, var det åbenbart, at der var tale om en bestræbelse på at kortlægge og forstå de usynlige, sammensatte og dynamiske kræfter, der former verden på det makroskopiske niveau. Fænomener af samme art som zenmunkene mediterer over i deres sandhaver i Kyotos templer, eller som Monet fordybede sig i i de sene åkandebilleder.



Figur 1. Forsøgsopstilling til studier af sandriller.

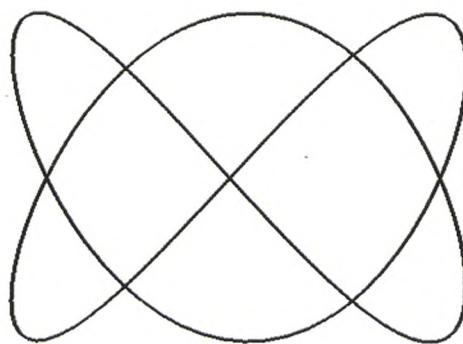
Efter invitationen fra museet i Esbjerg tog S&S kontakt til CE for at spørge, om det var muligt at låne sandrilleeksperimentet til en kunstudstilling. Vi havde aldrig mødt hinanden før, men det blev hurtigt klart, at vi havde mange fælles interesser, og vi endte med

at udføre væsentlige dele af udstillingen i Esbjerg i fællesskab.

Vores vigtigste berøringsflader var for det første en fundamental interesse for de æstetiske aspekter af de fænomener, vi hver især beskæftigede os med. Dernæst var vi på hver vores måde dybt optagede af generelle mønsterdannende fænomener, og endelig delte vi en umiddelbar undren over naturens beskaffenhed.

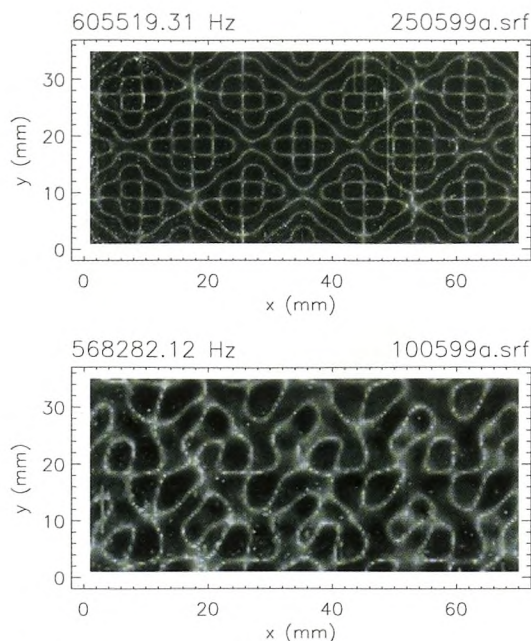


Figur 2. Rituel sandmaleri fra Sydindien.



Figur 3. Eksempel på en Lissajous-figur tegnet med formlerne $x = A \sin(at + \delta)$ og $y = B \sin(bt)$.

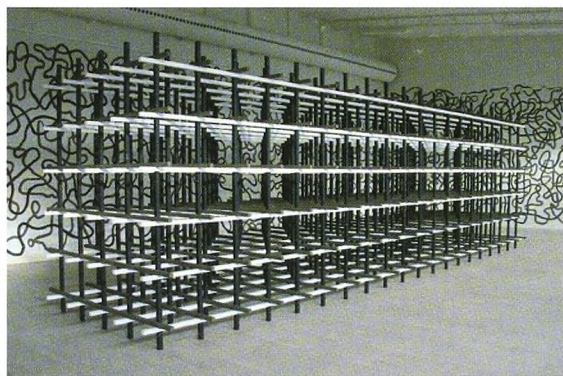
S&S havde fra begyndelsen af deres samarbejde i 1984 beskæftiget sig med mønstre af mange forskellig slags, fra rituel ornamentik til Lissajous-figurer (figur 2 og 3). CE havde på sin side i en årrække arbejdet som eksperimentalfysiker med mange typer af interferensmønstre, dynamiske systemer og bølgebevægelser som for eksempel stående akustiske bølger i kvartsplader (figur 4).



Figur 4. Interferensmaleri.



Figur 5. To streger flettet ind i hinanden.

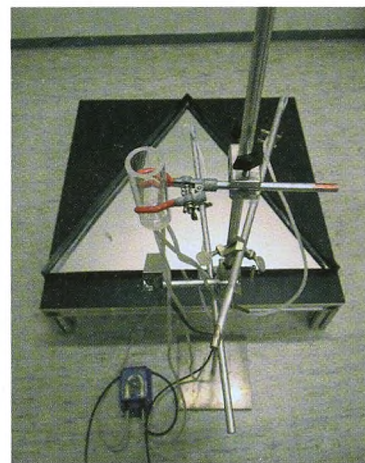


Figur 6. Statisk gitterkonstruktion og dynamisk vægmaleri.

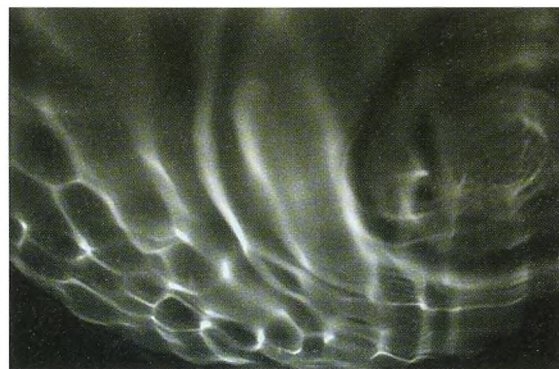
Vi valgte at gøre interferens til tema for udstillingen i Esbjerg. Væggene i museets centrale udstillingsrum blev dækket af en type udsmykning som S&S havde arbejdet med igennem et stykke tid under betegnelsen "interferensmaleri". Metoden består i, at to personer med hver deres farve maler en slynget strek begyndende fra hver sin ende af en given flade. De bevæger sig mod hinanden medens de afsøger fladens areal så opmærksomt som overhovedet muligt. Midt i rummet krydser de to streger hinanden, og derefter gælder det

udelukkende for de to agerende nervesystemer om at forholde sig til og kommentere den andens streg (figur 5). Midt i rummet anbragte vi en stor tredimensional gitterkonstruktion som en statisk kontrast til vægmaleriets slyngede dynamik (figur 6) CE's sandrilleksperiment blev anbragt i et tilstødende rum omgivet af tilhørende forklaringer, videobilleder og et autentisk, overtegnet whiteboard, der antydede diskussionerne i laboratoriet.

I et tredje rum viste vi vores egentlige fællesprojekt som fik titlen "Dråber der falder i vand" (figur 7 og 8). Installationen bestod af 11 separate apparater, der fyldte rummets vægge med ligeså mange distinkt forskellige, pulserende, kaotiske og interfererende lysmønstre. Apparatene var opbygget af tre forskellige typer flade bassiner, hvis bund var et spejl. Vandet kunne dryppe ned i bassinerne fra forskellig højde, med vekslende frekvens og dråbestørrelse. Bølgemønstrene blev projekteret op på væggene ved hjælp af lys, der ramte spejlet i bassinets bund. Med disse justerbare præcisionsinstrumenter var det muligt at skabe en organisk bevægelig og nærmest hypnotiserende rytmisk ornammentik.



Figur 7. Apparat til produktion af "dråbemønstre".



Figur 8. Vægprojektion af "dråbemønstre".

Esbjerg Kunstmuseum har som erklæret formål at forbinde billedkunsten med videnskabelig erkendelse og lægger i den forbindelse stor vægt på undervisning af skoleklasser, blandt andet i museets æstetiske laboratorium. "Interferens" var tænkt ind i denne sammenhæng som en slags åben og umiddelbart sanselig kode,

der kunne tolkes og forklares på mange forskellige måder og niveauer. Udgangspunktet var det konkrete fysiske fænomen, der opstår, når to bølgebevægelser støder sammen og begynder at påvirke hinanden indbyrdes. De interfererende bølgebevægelser forstærker eller ophæver hinanden og skaber derved mønstre og figurer, der i kvalitet og kompleksitet er fundamentalt forskellige fra deres udgangspunkt. Men det gælder ikke bare for bølger i vand, lyd og i lys. Kolliderende svingninger af alle mulige slags har denne egenskab, der pludseligt fører fra en tilstand til en anden. Både i naturen og i kulturen fødes de skabende og formdannende kræfter af mødet og interaktionen mellem forskellige fysiske og mentale systemer. For eksempel kan mødet mellem mennesker med helt forskellig faglig baggrund pludseligt føre til en ny fælles indsigt og inspiration.

Ånd og stof

Før mødet med CE havde S&S igennem en årrække interesseret sig for på forskellig måde at forbinde kunst og videnskab. Denne interesse førte i 1999 til et nært samarbejde med Princeton Engineering Anomalies Research Laboratory (PEAR) på Princeton Universitetet i USA. Samarbejdet gik ud på at udvikle en installation, der både kunne fungere som kunstværk og et stringent videnskabeligt eksperiment. Eksperimentet var baseret på PEAR Lab's mangeårige undersøgelse af muligheden for, at den menneskelige bevidsthed uden fysisk kontakt kan påvirke forskellige typer af tekniske systemer. En væsentlig del af denne forskning på PEAR lab. var bygget op omkring en såkaldt Random Event Generator (REG). Et instrument, der genererer tilfældige talrækker ved at registrere den absolutte uforudsigelighed som karakteriserer de subatomare partiklers fysiske aktivitet. Resultaterne af forskningen på PEAR Lab. syntes entydigt at vise, at menneskets bevidste eller ubevidste intentioner er i stand til at påvirke en sådan mikroelektronisk proces i svag men uafviselig grad, se bl.a. [1].

Det nye fælles eksperiment kom til at bestå af en REG, en computer og en LCD skærm (figur 9). På skærmen blev vist et billede, der til stadighed skiftede mellem forskellige stadier af tydelighed fra at være helt skarpt til at forsvinde i ren elektronisk hvidstøj (fig 10). Denne proces blev styret af tilfældighedsgeneratoren, som hvert sekund bestemte, om den enkelte pixel skulle vise enten billede eller hvidstøj. Systemet registrerede kontinuerligt udfaldet af disse valg. Ifølge lovene for statistisk tilfældighed burde skærmen være domineret af babybilledet i gennemsnitligt 50 % af tiden og af hvidstøj i de resterende 50 %. Som fokus for eksperimentet valgte vi et nærbillede af et attraktivt spædbarn med vidåbne øjne for at skabe maksimal emotionel kontakt mellem forsøgsopstillingen og den enkelte beskuer. Udover de nævnte elementer var installationen udstyret med tre lystavler, der viste eksperimentets aktuelle status og en lille LCD-skærm, hvor man kunne se den kontinuerlige strøm af nuller og ettaller fra tilfældighedsgeneratoren.

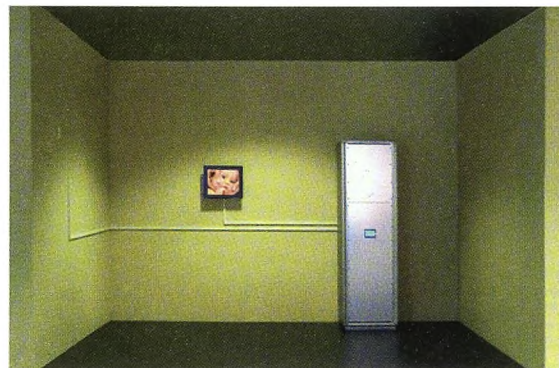


Figure 9. Stockholm Eksperimentet.



Figure 10. Skærmen skifter mellem støj og billede.

Eksperimentet foregik over et år på Trapholt Museet i Kolding og blev derefter gentaget i Kulturhuset i Stockholm. Resultaterne fra de to forsøg viste sig at blive helt forskellige. I det første forsøg var der en lille, men klar afvigelse fra de statistiske forventninger (figur 11). Samtidig viste det indbyggede kontrollforsøg (der ikke var forbundet til videobilledet) nøjagtig den fordeling af nuller og ettaller, som var statistisk forventelig.

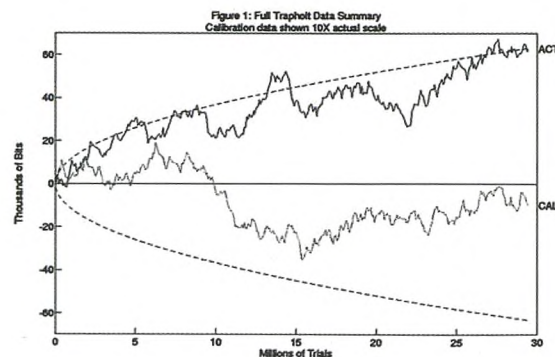


Figure 11. Statistik på målingerne fra Trapholt Eksperimentet.

I det andet forsøg var de indsamlede data nøjagtigt, som man kunne forvente ud fra lovene for statistisk tilfældighed. Dette forsøg blev imidlertid foretaget under omstændigheder, der var radikalt forskellige fra dem, der havde hersket på Trapholtmuseet. Det første forsøg foregik i et selvstændigt rum, hvor al fokus var på interaktionen mellem beskuer og skærbillede. Eksperimentet havde desuden stor offentlig bevågenhed, og mange gæster kom til museet specielt for at deltage i forsøget. I Stockholm var det lige omvendt. Forsøget var placeret i kulturhusets indgangsparti, et af de travleste mødesteder i byen. Omkring en million mennesker passerede forbi installationen i den periode, forsøget foregik. Men meget få havde nogen idé om, hvad det gik ud på, eller hvorfor det var der. Hvis

påvirkningen af forsøgsopstillingen havde at gøre med mental og emotionel intention og intensitet, så var det negative resultat sandsynligvis, hvad man kunne forvente.

Under arbejdet med "Interferens" blev CE bekendt med resultaterne fra de to forsøg. Efter adskillige samtaler blev vi enige om, at der var grundlag for et tredje forsøg, da sagen i en vis forstand var uafgjort. I første omgang fik vi den gamle forsøgsopstilling fragtet til NBI, hvor CE undersøgte de elektroniske komponenter og så nærmere på forskningsmaterialet fra PEAR Lab. Desuden fik vi PEARs grundlægger, Robert G. Jahn, professor i Aerospace Science og mangeårig dekan ved Princetons afdeling for Engineering and Applied Science til, sammen med laboratoriets daglige leder psykologen Brenda Dunne, at komme til Niels Bohr Institutet for at fortælle om deres forskning. Det afgørende spørgsmål blev, hvor stor en afvigelse fra det statistisk tilfældige der skal til, for at man kan sige, at et resultat er statistisk signifikant.

Efter mødet var der almindelig enighed om, at de beregningsmetoder, PEAR havde anvendt, var gode nok og at forsøgene derfor tilsyneladende viste en eller anden mærkværdig afvigelse fra det forventelige. Vi besluttede derefter at udføre den nye udvidede version af eksperimentet, som foregår på Esbjerg Kunstmuseum fra september 2009 til september 2010. Eksperimentet er i princippet det samme som tidligere bortset fra, at det er udvidet til at omfatte tre adskilte REG forsøg og desuden er hvert forsøg udstyret med en detektor, der registrerer, om der er mennesker i nærheden. Endelig er frekvensen for måltagning sat op fra 1 gang i sekundet til 10 alt sammen for at skabe en stærkt forøget datamængde¹. Selve installationens form og farvesætning er ligeledes fornyet i et forsøg på at intensivere den samlede situation (fig. 12).



Figur 12. Installation af Esbjerg Eksperimentet.

Som i de foregående versioner af denne installation er kunstværket og det videnskabelige forsøg umulige

¹Eksperimentet bag kunstværket er et rent evidensbaseret eksperiment. Det har som udgangspunkt tre state-of-the-art elektroniske tilfældighedsgenerators, og de indsamlede resultater vil blive underkastet en streng statistisk analyse – bl.a. udsat for NIST's Randomness Test Suite – inden der bliver draget konklusioner. En nærmere redegørelse for Esbjerg Eksperimentet og dets forudsætninger kan læses i hæftet Ånd – Stof, der er udgivet af Esbjerg Kunstmuseum i forbindelse med udstillingen.

at skille fra hinanden. På den ene side er kunstværket identisk med den videnskabelige forsøgsopstilling, selve forsøget og måden, det er konstrueret på. På den anden side er forsøget afhængig af, at installationen fungerer som et kunstværk, som museets publikum har lyst til at interagere med. For kunstværket er forsøgets resultat imidlertid underordnet. Det er et billede, der peger mod de kræfter i universet, som ligger skjulte for vores sansning. Installationen befinder sig på grænsen ikke bare mellem kunst og videnskab, men også på grænsen for menneskelig erkendelse i det hele taget. Den markerer det sted, hvor bevidstheden begynder at se ind i sig selv, hvor subjekt og objekt ikke længere lader sig skille ad og enhver nærmere forklaring derfor ophører med at give mening. Derfor har denne installation vist sig at danne et godt udgangspunkt for mange forskellige samtaler om fysik, bevidsthed, kausalitet og kvantefluktuationer. Installationen er en æstetisk og teknologisk situation, som åbner for en mulig direkte interaktion mellem menneskets ånd og ånden i naturen. Derved forbinder værket sig til kulturens ældste magiske rødder. Man kan måske sige at Esbjerg Eksperimentet er et forsøg på at forene kunstmuseet med templet og det videnskabelige laboratorium.

NBI Colliderscope

Vores seneste projekt blev til på et forslag fra CE. Idéen var at lave en eller anden form for lyskunstværk, der var i direkte live forbindelse med partikelkollisionerne i "The Large Hadron Collider" i CERN. Værket skulle både markere starten på det, som måske kan betegnes som verdens største videnskabelige eksperiment og Niels Bohr Institutets tætte involvering i eksperimentets tilblivelse. Vi blev enige om en simpel konstruktion bestående af et netværk på ca. 100 lysdioder, der skal integreres i hovedbygningens facadearkitektur (figur 13).



Figur 13. "NBI Colliderscope" visualiserer data fra Large Hadron Collider eksperimentet.

Den enkelte diode vil være rettet ind mod det lysegrå murværk, så lyset kommer til at danne et blødt og fleksibelt cirkulært lysfelt. Den samlede konstruktion gør det

muligt at lade sporene fra de enkelte partikelkollisioner i LHC'en komme til at bevæge sig hen over facaden i stadigt skiftende mønstre. Nogle lamper vil lyse kraftigt et kort øjeblik, andre kommer til at lyse svagt og gløde langsomt ud alt efter den enkelte partikels masse og energi. På samme måde vil partiklens bane bestemme, hvilke lamper der lyser. Af og til vil der være langt mellem de enkelte begivenheder, andre gange vil de komme væltende oven i hinanden. Værkets foreløbige titel er "NBI Colliderscope".

Kunstværket består både i den fysiske konstruktion, og i måden som datastrømmen fra LHC'en bliver oversat på. De spor, som værket videreformidler, kommer fra TRT-detektoren, der er en af to detektorer i LHC'en, der er konstrueret på NBI. Konstruktionen af de programmer, der oversætter de indkomne data fra CERN til lyskunstværket er sket i et tæt samarbejde med Troels C. Petersen fra Atlas-gruppen. Når LHC forsøget kører, bliver der genereret enorme og uoverskuelige mængder af information. Udfaldet af hver enkel partikelkollision bliver registreret af millioner af sensorer, ligesom der er millioner af målinger i sekundet. Disse data bliver siden udsat for en dramatisk filtrering og reduktion for at gøre dem anvendelige for systematisk analyse. Forskerne ser på de indkomne data, enten som rene talstørrelser eller som todimensionale grafiske repræsentationer. Idéen med lyskunstværket på NBI bygningen er imidlertid at lave en mere intuitiv og kompleks oversættelse af LHC'ens datastrøm. Tanken er at anvende alle de parametre, som findes i den indkomne strøm af data, ikke mindst partikelkollisionernes tilfældighedsrytme. Herved ønsker vi at gengive signalet fra LHC'en i sin fulde tonalitet, som var det en art gigantisk musikinstrument. Denne gengivelse af de voldsomme begivenheder i LHC'ens indre er ikke mindre naturtro end andre typer af gengivelse. Den egner sig ganske vist ikke til videnskabelig forskning, men til gengæld viser vores computermodeller, at der opstår et stærkt dynamisk billede, som er umiddelbart sanseligt og fascinerende for den forudsætningsløse tilskuer. Måske kunne man beskrive kunstværket som en intuitiv lysmembran, der forbinder beskuerens bevidsthed med de tilstande ved universets begyndelse, som bliver blotlagt af LHC'ens kollisioner. Lyskunstværket vil blive en præcis afspejling af de faktiske begivenheder i LHC'en, men i en musikalsk oversættelse til glæde for enhver, der passerer forbi Niels Bohr Institutet på Blegdamsvej.

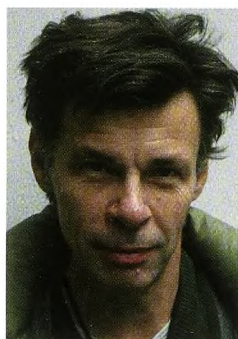
En slags konklusion

Videnskabens historie er en fortsat rækkefølge af forklaringer, der til stadighed avler nye spørgsmål, som igen kræver nye forklaringer, der fører til nye spørgsmål. Men videnskabens territorium er ikke uendeligt. Ved dets yderste grænse smelter strømmen af spørgsmål og forklaringer sammen, indtil der tilbage kun er den rene undrende væren. Det er her, hvor mening og form synes at opstå af ingenting, at videnskaben møder kunsten. De kommer til denne metafysiske egn fra hver sin side. Videnskaben ad rationalitetens og den logiske tankes vej og kunsten ad følelsernes irrationelle

stier. I en vis forstand er deres mål identiske. De forsøger med intuition og intelligens på hver sin måde at nærme sig eksistensens mysterium. De forsøger at skabe billeder, der giver mening. Men samtidig har de intet tilfælles overhovedet. Videnskabens ambition er, med fuldkommen objektiv præcision, at skille verden ad i dens enkelte dele, for at forstå hvordan de virker sammen. Kunsten forsøger derimod at samle verden i aldeles subjektive og flertydige udsagn. Kunsten og videnskaben repræsenterer to komplementære sider af menneskets væsen. Hver for sig er de fortabte. De behøver hinanden ligesom ånden behøver materien for at skabe et univers, der kan ses, høres og smages. Sammen med kunsten er det videnskabens opgave at fremelske billeder af verden, som ikke bare er sande, men også fundamentalt sanselige, så fornuft, følelse og forståelse kan følges ad. Hvis vi ønsker os en kultur, der er hel og hænger sammen, er vi nødt til at forsøge at forbinde det objektive med det subjektive.

Litteratur

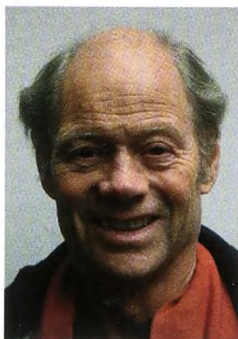
- [1] Dunne, Brenda J. og Robert G. Jahn, *Margins of Reality. The role of Consciousness in the Physical World*, Harcourt 1987.
- [2] Esbjerg Kunstmuseum (16 siders brochure kan hentes som pdf-fil), www.eskum.dk



Christian Skeel er billedkunstner og komponist.



Morten Skriver er billedkunstner og forfatter. Tidligere lektor ved det Kongelige Danske Kunstakademi.



Clive Ellegård er lektor emeritus, Niels Bohr Institutet.

Matematik er kunst uden pensel, kunst er matematik uden kridt

Af Henrik Jeldtoft Jensen, Department of Mathematics and Institute for Mathematical Sciences, Imperial College London, South Kensington campus

Skønt matematik og kunstmaling på overfladen kan forekomme som to meget forskellige aktiviteter, så besidder de dog mange fælles begrebsmæssige og håndværksmæssige træk på et lidt dybere plan. Slægtskabet går langt videre end den umiddelbare forbindelse som består i at geometri naturligvis spiller en betydelig rolle i begge discipliner. Både matematik og malerkunst beskæftiger sig med at begribe den omkringliggende verden gennem symboler. Begge søger gennem abstraktion at beskrive de vigtige og relevante generelle sammenhænge, som kan gemme sig bag det specifikke. Begge aktiviteter forsøger at begribe og håndtere begreber så som *åben* i modsætning til *lukket*, eller *endelig* i modsætning til *uendelig*. Ydermere benytter begge discipliner sig af kvalificerede gisninger og eksperimenterende undersøgelser. Det er ikke mindst vigtigt for den måde, vi underviser matematik på, at forholde sig til at matematik som disciplin er essentielt af samme natur som kunst, musik, humanvidenskab og ikke mindst malerkunst. Da vil vi undgå den fejl, som består i at opfatte matematik som noget ganske specielt og ligefremt menneskefremmed. Vi vil derimod indse, at matematik bør dyrkes på samme legesyge og eksperimenterende facon, som er traditionen, når man underviser i kunst, hvor eleven nemmere får fornemmelse af, at præcision og udforskning følges ad.

Introduktion

Matematik er videnskaben om mønstre; kunstmaling er artikulering gennem mønstre.

Idéen om, at der skulle være en barriere mellem de forskellige menneskelige aktiviteter, er naturligvis ny. Vi ved alle at Leonardo da Vinci var lige så meget maler, som han var videnskabsmand. Mange ved sikkert også, at Isaac Newton selv opfattede sin teologiske interesse og undersøgelser som lige så vigtige og betydningsfulde som hans naturvidenskabelige aktiviteter. Nok var da Vinci og Newton unikke i deres intellektuelle kapacitet, men de er langt fra de eneste videnskabsfolk og matematikere, som har fundet det frugtbart og vigtigt at beskæftige sig med kunst, teologi eller humaniora. Der behøver ikke at være en kløft på tværs af disciplinerne, tværtimod er der slægtskab og gensidig berigelse på tværs af de forskellige måder, mennesker forsøger at fordøje og kapere omverden på.

Matematik og kunstmaling er forbundet på mange måder og på mange niveauer. Først er der den tekniske forbindelse, udviklet for eksempel af den italienske arkitekt Filippo Brunelleschi omkring år 1400. Man kan tænke på den geometriske metode, som underbygger perspektivtegning. Eller man kan nævne den tematiske forbindelse, som Maurits Escher repræsenterer. Escher var fascineret af matematiske begreber og idéer, det inspirerede ham til at skabe billeder af det strengt talt fysisk umulige: såsom hans periodiske vandfald, der altid løber ned af, selvom det løber rundt i sig selv.

I det følgende vil jeg forsøge at beskrive, hvorledes matematik og malerkunst er beslægtet på en meget dyb måde. Helt basalt forsøger både matematik og malerkunst at repræsentere den omkringliggende virkelighed. Her er ikke kun tale om en snæver fysisk virkelighed, men en mere omfavnende realitet, som

ikke er bange for at tillægge åndelige konstruktioner en eksistens. Endvidere tilstræber både malerkunst og matematik en vis grad af universalitet. At dette er muligt bliver straks klart, når vi tænker på Euklids geometri (ca. 300 f.Kr.) eller vægmalerierne i Knossos (omkring 1500 f.Kr.). Selvom vort verdensbillede gennemgribende har ændret sig siden Knossos og Euklid, så er vi dog fuldt ud i stand til at værdsætte kunsten fra Knossos og bygger i dag videre på Euklids matematik. Jeg vil understrege følgende faktum: malerkunst og matematik er fælles om at forsøge at udvikle en symbolsk, koncis, og ofte meget abstrakt, repræsentation af virkeligheden. I begge tilfælde benyttes en proces som består af to stadier. Først *fordøjes* de væsentligste og mest generelle aspekter. Dernæst forsøger man gennem eksperimenter at finde frem til den bedste måde ved hjælp af symboler at repræsentere den identificerede struktur og det relevante tema. Denne helt basale fælles formålsparagraf er årsagen til en række idé- og begrebsmæssige paralleller mellem matematik og malerkunst. Nedenfor vil jeg diskutere hvorledes begreber som *åben* og *lukket*, eller *endeligt* og *uendeligt* er temaer, som bliver betragtet, håndteret og undersøgt både i matematik og i malerkunst. Jeg vil forsøge at tydeliggøre min argumentation ved at relatere nogle eksempler på matematisk formalisme og begreber til nogle udvalgte malerier. Jeg vil slutte af med nogle forslag til, hvorledes slægtskabet mellem matematik og malerkunst kan benyttes til at udvikle undervisningen i matematik.

Tekniske paralleller

At man kan forbinde matematik med malerkunst bliver straks klart, når man tænker på hvorledes matematik kan bruges til at analysere billeder. Perspektivtegning

har været studeret matematisk i flere hundrede år og for nylig er man blevet klar over, at fraktal geometri er den bedst egnede til at beskrive mange naturlige objekter, såsom skyer og bjerge. For få år siden tiltrak Taylor, Micolich og Jonas (1991) betydelig opmærksomhed, da de foretog en kvantitativ analyse af Pollocks dryp-malerier. Den matematiske analyse bestod i at måle, hvorledes de dråber af maling, som Pollock har strintet udover lærredet, er fordelt. Forfatterne konkluderede at Pollocks dråber former fraktale strukturer på lærredet¹. Ud fra denne tekniske undersøgelse påpegede Taylor et al., at på en måde er Pollocks malerier figurative og naturalistiske, idet naturen omkring os indeholder fraktaler alle vegne. Denne form for relation mellem matematik og malerkunst er af ekstern analytisk karakter (Jensen 2002). Den demonstrerede, at matematik kan være nyttig, når man vil analysere et billede, og måske kan forøge vores forståelse af billedets indhold og budskab. Men denne forbindelse mellem malerkunst og matematik er beslægtet med det forhold, der findes mellem matematik og ethvert emne, som kan undersøges matematisk. Vi kan naturligvis med stort held benytte matematik, når vi vil designe en bro. Men selve konstruktionen af broen er nok af en ganske anden natur end det at dyrke eller udføre matematik. Formålet med brobygning er et ganske andet end formålet med matematik. Det ændrer ikke noget ved, at matematik er yderst brugbart for brobyggere. Forholdet mellem matematik og malerkunst er langt mere intimt. De er fælles om hensigt og formål, ydermere er der megen lighed mellem de mentale aktiviteter involveret i begge aktiviteter.

Begrebsmæssige paralleller

Matematik og malerkunst er tydeligvis fælles om at forsøge at indfange og beskrive de dele af virkeligheden, som ikke på en tilfredsstillende måde kan beskrives ved hjælp af sproget alene. Et billede af en kvinde kan f.eks. på et plan repræsentere en kvinde og samtidig på et andet plan række langt bag om det konkrete afbillede objekt. Det kan tydeligt illustreres ved at tænke på, hvorledes den ortodokse kirkes ikonmalere stræber efter at skabe billeder, der bringer os i forbindelse med helt andre dimensioner af virkeligheden. Når en person, der besidder en grad af religiøs følsomhed, mediterer over et ikon af Jomfru Maria, er det ikke et portræt af en ung kvinde, der fremkaldes i beskuerens bevidsthed. Det er snarere et sæt af transcendentale begreber og følelser, som er relateret til *Theotokos* eller *Gud-bæreren* eller *Den som fødte Gud*. Ikonets formål er at frembringe eller kommunikere abstraktioner, som er langt fjernet fra den umiddelbart håndgribelige fysiske verden. Ikonet forsøger at håndtere begreber, som ikke kan reduceres til den lave båndbredde, som vort

dagligsprog er begrænset af. Det er klart nok ikke kun religiøs kunst, som vil udtrykke det usigelige. Ethvert maleri, figurativt eller abstrakt, indeholder altid et forsøg på, at frembringe opfattelser og følelser i beskuerens sind, der er langt større end, hvad en verbal beskrivelse af lærredets objekter vil indfange.



Figur 1. "Holy Icon of Theotokos Threnody" (ca. 1860-1880) af Ioasaf Athonites.

Situationen er den samme i matematikken. Her konstrueres et begrebsmæssigt univers med nogle forankringspunkter til den fysiske observerbare virkelighed. Herfra foretages så en ekspedition ud i den abstrakte verden, som bæres i den menneskelige bevidsthed. Lad os som eksempel tænke på tallene. De naturlige tal kan umiddelbart bringes i relation til konkrete objekter, såsom antallet af kugler på en kugleramme. De rationelle tal lader sig også begribe ved hjælp af simple geometriske figurer, f.eks. opdeling af en lagkage. Det er straks sværere at repræsentere de irrationelle tal på en håndgribelig måde. Mindst konkrete er dog de komplekse tal, som er defineret ved deres algebraiske egenskaber, nemlig som bekendt ved at antage, at man kan opnå negative værdier ved at multiplicere et komplekst tal med sig selv². Endskønt de komplekse tal kan forekomme verdensfjerne, så ved vi nu, at de tillader os at beskrive fundamentale dele af virkeligheden. For eksempel ville vi ikke kunne beskrive den atomare kvantemekaniske verden uden de komplekse tal – eller en tilsvarende algebraisk struktur.

Det er også naturligt at nævne, at både matematik og malerkunst benytter sig af et symbolsprog, der er i stand til at fremmane associationer, som der ikke umiddelbart refereres til. Dette forudsætter dog at "beskueren" besidder den rette baggrund. Tænk på, hvorledes ovenstående Theotokos' Ikon hos en ortodoks kristen kan frembringe associationer til et transcendentalt religiøst plan, som ikke direkte er tilstede i billedet. Et parallelt eksempel fra matematik består i de myriader af associationer, som en person med en

¹Hvorvidt der strengt taget er tale om en fraktalfordeling eller en uniform Euklidisk fordeling kan diskuteres. Taylor, Micolich og Jonas fandt en fraktal dimension meget tæt på 2. Men det er ikke af betydning for vores diskussion her.

²Identifikationen af komplekse tal med punkter i den to dimensionale plan kan måske nok forekomme som en simpel repræsentation sammenlignelig med at repræsentere de naturlige tal vha. kugler eller de reelle tal vha. længden af et linjestykke. Men man skal huske, at den geometriske repræsentation af komplekse tal kom til sent i deres historie, samt at man bliver nødt til at pålægge bestemte regler for, hvorledes punkterne i planen kan adderes og multipliceres før planen bliver ækvivalent med de komplekse tal.

smule matematisk træning oplever, når man betragter diffusionsligningen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \nabla^2 \varphi. \quad (1)$$

For en person uden kendskab til matematisk notation vil ligningen ikke betyde meget. Men har man en baggrund i matematik, vil man straks ledes til at tænke på begreber så som varme, tilfældig gang (random walk), fløde der spredt sig i en kaffekop og meget andet. Og alt det på trods af, at symbolerne i ligningen ikke direkte refererer til noget af dette. De begrebsmæssige ligheder mellem matematik og malerkunst er for mig at se årsagen til en række fællestræk i strukturen af matematik og kunst. Begge benytter sig på en meget bevidst og essentiel måde af emergens, eller hvad man kan kalde ikke-lineær konstruktion, hvor slutresultatet har et indhold, som er væsentligt forskelligt fra bestanddelene. Jeg vil illustrere dette først med et lille eksempel og dernæst betragte paralleller mellem Euklids geometri og Kandinskys teori om den åndelige betydning af geometriske objekter og former.

Her er et eksempel på kunstnerisk skabelse. Tag følgende komponenter “•”, “◦”, “—” og “(”. Hver enkelt del genererer ikke megen følelsesmæssig bevægelse. Men sætter vi nu delene samme til ☺, så vil vort sind straks reagere. Vores mentale reaktion på det lille ansigt er et resultat af en uendelighed af vekselvirkende komponenter. Først er der de fire geometriske elementer, dertil kommer hele vort kognitive maskineri og dermed også vor kulturelle baggrund. Alle disse bestanddele må samarbejde for at sætte beskueren i stand til at registrere og fortolke det følelsesmæssige indhold i den lille figur.

På tilsvarende måde i matematik. Ikke-lineære operationer fører også her til helt nye egenskaber, som er “større end summen af de enkelte dele”. Igen er det vekselvirkningen mellem komponenterne, der giver anledning til, at noget helt nyt kan opstå. Et nemt og dog rimeligt repræsentativt eksempel kan være en ikke-lineær funktion af mere end én variabel, f.eks. $f(x, y) = (x + y)^2$. De funktionelle og geometriske egenskaber af $f(x, y)$ er kvalitativt forskellige fra den lineære opførsel af de enkelte uafhængige variable opfattet som funktioner: $g(x) = x$ og $h(y) = y$. Et mere interessant tilfælde, som også er mere beslægtet med det lille “smiley”-eksempel, består i de nye egenskaber, som kan fremkomme i grænsen, hvor man betragter en uendelighed af vekselvirkende variable. Den matematiske beskrivelse af fysiske faseovergange, såsom når vand fryser, består i at beskrive vekselvirkningen mellem “uendelig” mange partikler. Den dramatiske faseændring kan kun opstå, når uendeligt mange partikler er involveret. Det er parallelt til, at der er myriader af komponenter involveret, når de fire geometriske byggesten “•”, “◦”, “—” og “(” og vores sind transformerer det lille billede ☺ til en følelsesoplevelse.

Lad os nu kigge lidt på den bemærkelsesværdige lighed, der er imellem Euklids geometri og Kandinskys forsøg på at etablere et analytisk og aksiomatisk

fundament for malerkunsten. De følgende få citater er tilstrækkelige til at illustrere pointen.

Fra Euklids første bog:

Definition 1. Et punkt er det, som ikke har nogen bestanddele.

Definition 2. En linie er en længde uden bredde.

Definition 3. Enderne af en linie er punkter.

Definition 4. En ret linie er en linie, hvor punkterne ligger jævnt.

Definition 5. En flade er det, som kun har længde og bredde.

Definition 6. Kanterne af en flade er linier.

...

Som vi alle ved konstruerede Euklid sin geometri ud fra definitionerne ved hjælp af deduktion og aksiomer. Så lad os nu sammenholde dette med Kandinskys bog *Punkt und Linie zur Fläche* fra 1926. Kandinsky skriver:

Elementer: Det første uundgåelige spørgsmål er naturligvis spørgsmålet angående elementerne, som er kunstens byggematerialer, og som sådanne er forskellige for hver enkelt kunstform.

Kandinsky fortsætter dernæst med at introducere en række definitioner:

Det geometriske punkt: er en usynlig ting. Derfor må det være en ulegemlig ting. Betraget i termer af substans er det lig med nul. Skjult i dette nul er imidlertid visse egenskaber som er af “menneskelig” natur. . .

Den geometriske linie: er en usynlig ting. Det er sporet efterladt af et bevægende punkt, dvs dets produkt. Det er skabt af bevægelse – mere specifikt gennem punktets destruktion af det intense selvstændige svar. . . Ved begrebet “Basis Plan” forstås den materielle plan, som skal modtage kunstværkets indhold. Det vil blive betegnet BP. Det skematiske BP er afgrænset af 2 horisontale og 2 vertikale linier, og vil derved fremstå som en individuel ting. . .

Lige som Euklid udleder Kandinsky dernæst fra definitionerne egenskaber, som hans byggesten må besidde. Han bemærker således f.eks.: “Linien er derfor den største antitese til det billedlige proto-element – dvs til punktet. Strengt taget kan linien blive betragtet som et sekundært element”.

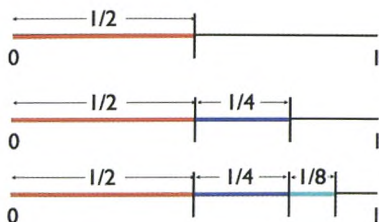
Disse to korte uddrag illustrerer at både matematik og malerkunst, i det mindste nogle gange, kan blive betragtet som deduktive aktiviteter. Der er måske nogle, som vil sige at den nære parallel mellem Euklid og Kandinsky kommer fra, at de begge beskæftiger sig med geometri i en eller anden form; og at de derfor ikke repræsenterer et mere generelt slægtskab mellem malerkunst og matematik. Men dertil er at betragte

begreber, som ikke er af direkte geometrisk natur. Jeg har for nogle år siden diskuteret, hvorledes begreber som *åben* og *lukket*, der benyttes i topologi, nogle gange kan relateres til den overordnede atmosfære i et billede (Jensen 2002). Her vil jeg gentage, at et billede som van Goghs *Værelse i Arles* fra 1889 (Musée d'Orsay, Paris³), bibringer beskueren en fornemmelse af indelukthed; af en lille del af universet totalt lukket af fra det omkringliggende. Dørene er lukkede. En seng blokerer den ene og en stol er stillet foran den anden. Rummets eneste vindue er tildækket, måske det er skodder, som afskærer udsynet. Billedets kant er tydeligt markeret og indeholdt i selve billedet. J.M.W. Turner udtrykker den modsatte følelse i sit billede *Snowstorm* fra 1842 (Tate Britain, London⁴). Dette billede strækker sig langt ud over lærredets felt. Billedet er fuldstændigt åbent. Her gøres det klart at hele verden er omsluttet af en voldsom altopslugende snestorm. Vi kan simpelthen ikke nå ud af billedet.

Parallellerne mellem matematik og malerkunst er ikke kun begrænset til det figurative. Lad os som eksempel kigge på, hvorledes det abstrakte begreb *uendeligt* behandles. Det uendelige er helt centralt i matematik. Zenons paradoks er et eksempel på matematik, der kræver håndtering af det uendelige. Paradokset omhandler væddeløbet mellem skildpadden og Achilles og involverer addition af uendeligt mange tal. Grunden til at Achilles vil indhente og overhale den langsomme skildpade er naturligvis, at Achilles kun behøver en endelig tid til at løbe afstanden mellem skildpadden og ham selv. Skildpadden formår at forvirre Achilles ved at bryde afstanden op i en uendelighed af små bidder. Først må Achilles løbe den $1/2$ distance, dernæst halvdelen af, hvad der er tilbage, altså $1/4$ af den oprindelige afstand. Når han har gjort det, må han atter igennem halvdelen af, hvad der nu er tilbage, altså $1/8$ af den oprindelige afstand. Så Achilles må gennemløbe en uendelighed af etaper, og det ser jo slemt ud, som om det kunne tage uendeligt lang tid. Bedre bliver det ikke af at skildpadden, hver gang Achilles har afsluttet en etape vil have bevæget sig lidt længere frem, men dette er ikke væsentligt, så lad os ignorere den detalje nu. En lille tegning viser straks at summen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (2)$$

vil summere op til 1.



Figur 2. Intervallet halveres i det uendelige.

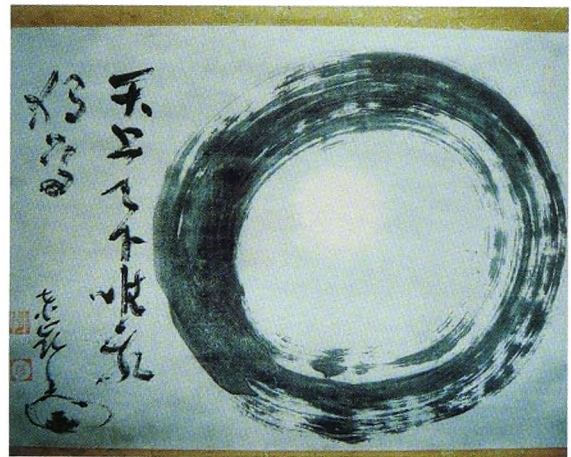
³<http://www.ibiblio.org/wm/paint/auth/gogh/>

⁴<http://www.tate.org.uk/servlet/ViewWork?workid=14786>

Altså behøver vi ikke foretage en uendelighed af operationer for at konkludere, at

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1. \quad (3)$$

Dvs et pænt endeligt resultat. Vores intellekt og matematik kan håndtere det uendelige i et snuptag og uddrage et endeligt resultat. Det er uden betydning, at den faktiske beregning, dersom vi udførte den, ville bestå i at addere uendelig mange brøker, og derfor ville tage uendeligt lang tid.



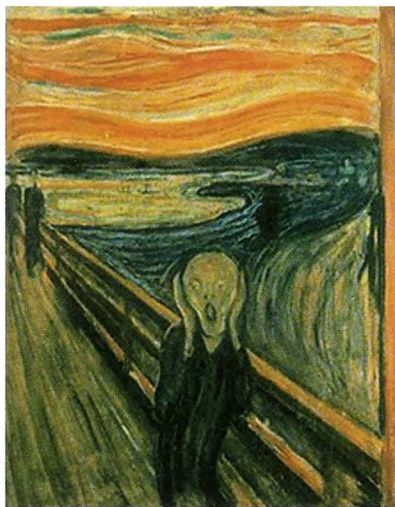
Figur 3. "Zen Circle" eller "Enso" af Torei Enji (1721-1792).

En maler kan på en tilsvarende måde repræsentere det uendelige. Det er elegant demonstreret i Torei Enji's (1721-1792) Enso, eller Zen Cirkel, tegnet med blæk på papir. En Enso symboliserer i Zen Buddhismen oplysning, styrke og elegance. Men samtidig repræsenterer en Enso også universet og det tomme rum. På den måde kan en Enso ses som en repræsentation af det uendelige og det udtømmelige. Zen Cirkelns virkemåde bliver måske mere tydelig, når man betragter den cirkulære form $\bigcirc$ i kontrast til trekanten $\triangle$. Hjørnerne på trekanten bryder den fornemmelse af uophørlig bevægelse, som opstår i vort sind, når vore øjne følger cirkelns periferi. Derfor kan cirklen række ud mod det uendelige, mens trekanten forbliver bundet til det endelige.

Parallele strategier

Det er både interessant og belærende at overveje, hvorledes den samme angrebsmåde kan blive identificeret i både matematik og malerkunst. Jeg mener, der er talrige eksempler herpå, men vi vil blot kigge på et par stykker her. Lad os begynde med at overveje, hvorledes figurativ analyse benyttes i kontrast til ikke-figurativ. Kandinsky er en fremragende eksponent for forsøget på at kommunikere ved hjælp af en ikke-figurativ kode. Tilsvarende, selv om megen matematik har sit udspring i geometri og analyse af rumlige strukturer, så er der også discipliner, såsom talteori og gruppeteori, i hvilke

der stort set ikke benyttes nogen direkte figurativ analogi. Dog vil en matematiker efter at have beskæftiget sig med enten talteori eller gruppealgebra et stykke tid, udvikle en intuitiv repræsentation af de abstrakte matematiske strukturer, som lever et sted uden for den figurative virkelighed. Dette svarer helt til Kandinskys program nævnt ovenfor, i hvilken han prøvede at identificere den ikke-figurative åndelige værdi af abstrakt malede former.



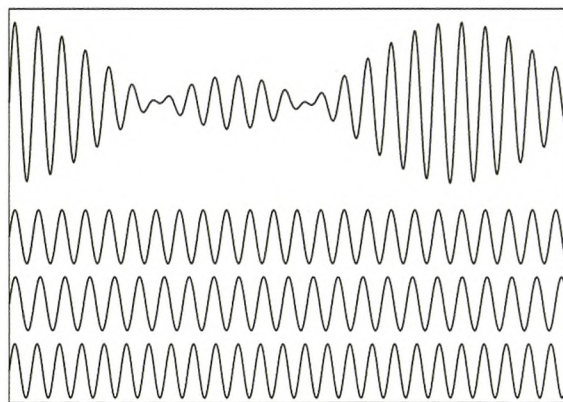
Figur 4. "Skriet" af Edward Munch, olie tempera og pastel på karton. National Gallery, Oslo.

Et andet tydeligt eksempel på parallelle strategier i malerkunst og matematik består i bestræbelsen på at uddrage det essentielle og udelade irrelevante detaljer. Tænk på Edward Munchs *Skriet* eller, som det oprindeligt blev kaldt, *Naturens Skrig*. Kun det absolut nødvendige er inkluderet i billedet for på den måde at sikre, at den overordnede komposition frembringer en fornemmelse af uudgrundelig angst. Billedets hjerteskerende effekt er i høj grad et resultat af, at detaljer ikke får lov til at distrahere. Hvis Munch havde gengivet ansigterne, eller de menneskelige former, mere detaljeret, ville vort sind straks frembringe associationer til bestemte mennesker, vi kender. På tilsvarende måde er vi ikke i stand til at forbinde de brede strøg, som angiver baggrunden, med en bekendt geografisk lokalitet. Vi er derfor tvunget til at opleve billedet som en prototype af generel relevans for vores følelsesliv. Hvis den skrigende figur i forgrunden havde mindet mig om min tante, eller de to mørke skikkelser i baggrunden så ud som de to ubehagelige fyre, der altid var ude på ballade lørdag aften i min barndoms by, da ville jeg måske ikke have forstået at figuren i forgrunden er mig selv på vej over én af de mangfoldige virkelige eller virtuelle broer, jeg må krydse på min vej gennem livet.

I matematik kan det være lige så vigtigt at udelade irrelevante detaljer. Tænk på Newtons bevægelsesligning

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F. \quad (4)$$

Denne ligning beskriver, hvorledes positionen af en partikel, $x(t)$, afhænger af tidspunktet t , når kraften F virker på partiklen. Ligningen henviser kun til partiklens masse m , og kraften F , derimod negligeres f.eks. partiklens farve og alder. Både Munchs maleri og Newtons lov er i stand til at studere det relevante emne, verdensangst og partikelbevægelse, ved at udelade en uendelighed af detaljer. Dybden af vor forståelse er nært forbundet med at identificere for dernæst at negligere de irrelevante detaljer.

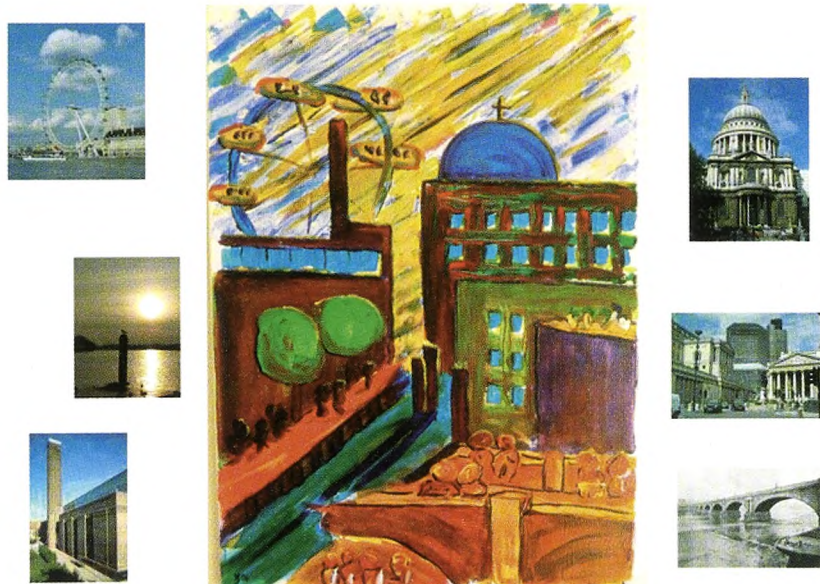


Figur 5. Interferens mellem tre bølger med næsten samme frekvens.

Det hænder ofte at maleren og matematikeren benytter sig af en analog teknik. Vi vil blot kigge på to eksempler. Det første består i brugen af superposition. Dvs at man adderer komponenter for at opnå en helhed, som er forskellig fra, og ofte på mange måder af en anden natur, end samlingen bestående af de individuelle dele. Superposition i matematik kan f.eks. bestå i at addere oscillerende bølger for derigennem at opnå en ny type tidslig opførsel. I den følgende ligning lægger vi tre sinus-bølger sammen med lidt forskellige frekvenser, θ_1 , θ_2 og θ_3 , for at konstruere et nyt signal $f(t)$:

$$f(t) = \sin(\theta_1 t) + \sin(\theta_2 t) + \sin(\theta_3 t). \quad (5)$$

Resultatet bliver, som vist på figuren, et signal af en ganske anden type. Interferensen mellem de tre bølger frembringer en bølge med en lavfrekvent variation i signalets amplitude. Det er naturligvis netop denne "stødfrekvens", man benytter sig af, når man med gehør stemmer et strengeinstrument og drejer på stemmeskruerne indtil de lavfrekvente stød forsvinder. Fremkomsten af en ny kvalitet gennem kombination af komponenter kan også fornemmes i maleriet af Londons vartegn (figur 6). Billedet er malet efter hukommelsen. Fotografierne fra internettet er indsat som reference. Selv om de forskellige strukturer befinder sig spredt på tværs af London, så formidler billedets superposition måske det helhedsindtryk, som en turist føler efter en travl sightseeing tur i storbyen. Hukommelsen har en tendens til at registrere en helhed – en collage – hvor enkeltoplevelser mister deres præcision for i stedet tilsammen at efterlade én fornemmelse i vort sind.



Figur 6. Collage over berømte steder i London.

Vort sidste eksempel på begrebsmæssige paralleller mellem matematik og malerkunst har at gøre med hierarkiske strukturer. Fra matematikken kan man tænke på de forskellige typer af tal. Først er der de naturlige tal $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, som er indeholdt i de hele tal $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, som er indeholdt i de rationale tal $\mathbb{Q}$, der atter er indeholdt i de reelle tal $\mathbb{R}$, som er indeholdt i de komplekse tal $\mathbb{C}$. Eller mere kortfattet

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \quad (6)$$

Moderne matematik er opbygget ved hjælp af abstrakt mængdelære, som netop er en formaliseret måde at beskrive relationer mellem grupper af forskellige objekter. Mængdelære benyttes hele tiden på tværs af alle matematikkens discipliner og tillader en meget større præcision, end det var muligt tidligere.

Russells paradoks er et berømt eksempel på de komplikationer, der kan opstå, når man kombinerer hierarkiske strukturer og selvreference. Russell foreslog at "betragte en mængde der indeholder alle de mængder, som ikke er medlemmer af dem selv". Hans overvejelser ledte ham til et paradoks af samme natur, som det den mytologiske Epimenides fra Kreta opdagede, da han sagde: "Alle kretensere er løgnere. Jeg er kretenser. Lyver jeg eller ej?"

Ovenstående skulle gøre det klart at hierarkier er af stor betydning i matematikken. Hierarkiernes styrke udnyttes også i malerkunsten til at fremmane et globalt og ubundet indtryk. Tænk på Picassos malerier såsom *Portræt af Ambroise Vollard*⁵ eller *Klarinetspilleren*⁶.

Billedet nedenfor er et semi-figurativt eksempel på en hierarkisk komposition. Det samme tema gentager sig selv i mindre skala (en fraktal), hvorved det bliver svært at udnævne nogle områder i billedet, som værende mere vigtige end andre. Måske billedet på den måde opnår en omfavnende transcendent karakter.



Figur 7. Dybdevirkning i fraktalt maleri.

Konsekvenser

Spørgsmålet er, om de ligheder, der eksisterer mellem matematik og malerkunst, er af nogen væsentlig betydning. Jeg mener at dette slægtskab giver os mulighed for at forholde os til matematik på en anden og mere kreativ måde, end det ofte for tiden er tilfældet. Når vi betragter matematik som væsensbeslægtet med malerkunst, falder det lige for at introducere børn og voksne til matematik gennem en åbensindet bred eksperimentel angrebsvinkel. Ydermere bliver det klart, at hvem som helst kan gøres bekendt med matematik. Som bekendt er det ikke usædvanligt at høre folk, der hævder, at der kræves en bestemt type hjerne for at forstå matematik. Det kan nok være sandt, hvis man tænker på matematik på højeste forskningsniveau. På samme måde som Picasso var en specielt begavet maler, og Mozart var usædvanlig musikalsk talentfuld, var Einstein uden tvivl bedre end de fleste til at tænke

⁵<http://www.artchive.com/artchive/P/picasso/vollard.jpg.html>

⁶<http://www.thearttribune.com/Picasso-cubiste.html>

logisk (og intuitivt). Men det er jo ikke sådan, at enten kan man male som Picasso, eller også maler man overhovedet ikke. Eller enten har man Mozarts geni, eller også synger man aldrig en sang. På tilsvarende måde er det klart, at man kan beskæftige sig berigende med matematik uden at have Einsteins fremragende begavelse. Slægtskabet mellem matematik og malerkunst viser præcis, at matematisk tænkning er naturlig for den menneskelige hjerne. Børn og voksne benytter gerne krusedulletegning som en måde at hjælpe tankerne på gled. Kruseduller er en form for symbolsk tænkning, hvad enten de foregår på et bevidst analytisk eller et delvist ubevidst intuitivt plan. Pointen er, at matematisk tænkning ofte er tæt beslægtet med de tankeprocesser, som vi alle benytter os af, når vi laver kruseduller eller simple tegninger og malerier. Og derfor er en krusedulle-tegnende hjerne også i stand til at tænke matematisk, i det mindste på et basalt niveau.

Så hvorfor ser vi ikke børn og voksne bryde ud i spontane matematiske overvejelser på samme måde, som vi ser dem lege med tegning? Årsagen er den samme som, hvorfor vi ikke bryder ud i spontane jubelbrøl på aramæisk. Det er ikke fordi vor hjerne ikke besidder kapaciteten til at tale aramæisk, eller fordi man skal besidde et specielt talent for at tale aramæisk. Vi er nødt til først at modtage målrettet træning i det aramæiske sprog. Ligeledes må vi stille træning i matematik til rådighed for derved gradvist at udvikle det naturlige potentiale hos børn og voksne. Hvis vi betragter undervisning i matematik fra det udgangspunkt, at matematik og malerkunst er væsensbeslægtede, vil vi nok ændre på vor pædagogiske strategi. Jeg foreslår, at det kan være befordrende at nærme sig visse matematiske idéer ved at bede elever eller studenter om at lave billeder, der vil rette elevens forestillingsverden mod de vigtigste overordnede aspekter af det matematiske emne, man skal til at introducere. Måske eleverne på denne måde vil blive klare over, at før vi tilegner os de mere tekniske sider af matematikken, er vi nødt til først:

1. at lære at analysere: dvs. identificere det væsentlige.
2. at lære at kombinere og komponere.
3. at blive behændige i brugen af symbolsprog.

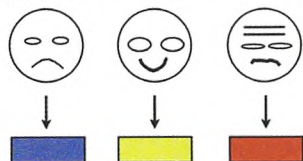
Følgende tre konkrete eksempler skulle tydeliggøre, hvorledes jeg mener dette kan gøres.

- (A) Matematisk emne: Topologi/mængdelære – åbne og lukkede mængder.

Øvelse: Tegn en struktur som ikke indeholder sin egen afgrænsning. Tegn en anden som eksplicit afgrænser sig selv.

- (B) Matematisk emne: Funktional, f.eks. $y = y(x) \mapsto J[y]$.

Øvelse: Lav en serie af smileys i forskelligt humør: bedrøvet, glad, vred, syg, etc. Knyt nu til hver smiley en enkelt farve som bedst repræsenterer dens humør.



- (C) Matematisk emne: At se indholdet bagom formalismen.

Øvelse: Diskuter det følelsesmæssige indhold i Munchs *Skrig*.

Konklusion

Vi oplever for tiden både et paradoks og et seriøst problem. Vor verden bliver uophørligt baseret mere og mere på matematik. Handel, ingeniørvidenskab, medicin, psykologi, sociologi, sprogvidenskab, filmkunst etc. er alle væsentligt afhængige af matematik. Samtidig ser vi mange steder, i det mindste i den vestlige verden, et dalende niveau af matematikundervisningen i grundskolerne. Måske dette er årsagen til det faldende antal af studerende, der i videregående uddannelser vælger matematisk relaterede fag. Jeg tror, at en ændring af vor attitude er nødvendig. Vi bliver nødt til at fremstille matematik som, hvad det virkelig er, nemlig en levende og undersøgende aktivitet fuld af leg og undren, og ikke blot en disciplin som består i at lære udenad, hvad folk i en fjern fortid hittede på. Ved at sammenholde matematikkens væsen med andre menneskelige udtryksformer, såsom malerkunst, vil vi nemmere kunne gøre det klart, at det kan være ligeså berigende at tilbringe tid med Eulers tanker, som det er at dvæle over et billede af Picasso eller være omsluttet af Mozarts musik.

Jeg er Vibeke Nordmark Hansen, Barbara Nordmark Jeldtoft Jensen og Paolo Sibani taknemmelige for behjælpelige kommentarer til den engelske udgave af denne artikel, der blev præsenteret som nøgleforelæsning ved *International Conference "Excellence: Education & Human Development"*, i Athen den 1.-4. juli 2009.

Litteratur

- [1] Jensen, H.J. (2002), Mathematics and painting, *Interdisciplinary Science Review*, bind 27, No. 1, p. 45-49. (se www.ma.ic.ac.uk/~hjjens)
- [2] Euklids Elementer er blevet publiceret på mangfoldig vis op gennem århundrederne. Følgende er en rigtig god hjælp <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>
- [3] Kandinsky, W. (1979), *Point and line to Plane*, Dover Publications, Inc. New York.
- [4] Taylor, A., Micolich, A., Jonas, D. (1999), Fractal expression, *Physics World*, bind 12, October, p. 25-28.



Henrik Jeldtoft Jensen er professor i matematisk fysik ved Imperial College London, hvor han leder en forskningsgruppe i kompleksitetsvidenskab (www3.imperial.ac.uk/mathsinstitute/).

KVANT-nyheder

Af Sven Munk og John Rosendal Nielsen, KVANT

Saturns største ring

ASTROFYSIK. Med NASAs rumteleskop Spitzer har man opdaget en ring omkring Saturn, som er langt større end noget tidligere set. Ringen "begynder" omkring 6 mio. km fra planeten og "slutter" ude i en afstand på 12 mio. km. Koncentrationen af stof er meget lav, så ringen er ikke synlig med det blotte øje. På billedet herunder markerer prikken i ringens centrum saturn.



For at afsløre tilstedeværelsen af den store ring måtte Spitzer's longer-wavelength IR-kamera (også betegnet multi-band imaging photometer) tages i brug. Selv om støvet i ringen kun har en temperatur på 70 K, er der nok termisk udstråling til, at Spitzer har kunnet opfange det. Spitzer Teleskopet, opsendt i 2003, kredser om Solen og er for øjeblikket 107 mio. km fra Jorden.

Kilder: A.J. Berbisier, M.F. Skrutskie und D. P. Hamilton, *Nature*, DOI:10.1038/nature08515; <http://www.spitzer.caltech.edu/>

Multiferroika er under udforskning

FASTSTOFFYSIK. At lave et materiale, der samtidig kan være ferroelektrisk og ferromagnetisk, har været en vision i mange år. I begyndelsen benyttede forskere betegnelserne *ferroelektromagnetika* og *ferromagnetoelektrika*. I bestræbelserne på at systematisere begreberne kan man nu finde *ferroisk orden* og *ferroika* anvendt.

I materialer med den såkaldte magnetoelektriske effekt kan den ferromagnetiske orden ændres med en elektrisk spænding – og omvendt påvirke den ferroelektriske orden med et magnetfelt. Dette er i sig selv ikke en sjældenhed, men effekterne er små og derfor ikke lette at anvende i praksis. I multiferroika skulle en fælles orientering af elektriske dipoler og magnetiske spin bevirke en stærkt forøget virkning. Blot for at pege på en enkelt mulighed: strømløse magnetiske sensorer, der selv frembringer en spænding, når et magnetfelt rykker nærmere.

Ved lave temperaturer et godt stykke fra stuetemperatur er den magnetoelektriske effekt tydelig i manganit (RMnO_3) med sjældne jordarter ($R=\text{Ho, Er, Tm og Yb}$). Her vil

påtrykning af et elektrisk felt give en faseovergang fra en antiferromagnetisk til en ferromagnetisk tilstand.

På nuværende tidspunkt er mere end 100 forbindelser kendte som besiddende multiferroistiske egenskaber. Et stof som Vismutferrit (BiFeO_3) udviser endog magnetiske og ferroelektriske egenskaber ved stuetemperatur.

Kilder: T. Lottermoser, T. Lonkai, U. Amann, D. Hohlwein, J. Ihlinger, and M. Fiebig, *Nature* **430**, 541 (2004); <http://www.ncnr.nist.gov/staff/jeff/Multiferroics.html>

Planeten med lavaregn

ASTROFYSIK. Atmosfæren på exoplaneten COROT-7B er lidt usædvanlig. Skyerne består af lavadamp og nedbøren kommer derfor som fortættet lavadamp. Om denne planet vides, at den, som Jorden, er præget af en overflade af sten. Den er større end Jorden (5 gange Jordens masse) og omkredser sin stjerne i en afstand af 2,5 mill. km.



Forskere har simuleret hvilke ligevægtstilstande, der kan råde i en atmosfære under så ekstreme betingelser. For COROT-3B er de kommet til det resultat, at atmosfæren hovedsagelig består af natrium, kalium, siliciummonoxid og ilt. Stenmaterialer indeholder hyppigt ilt, som frigøres, når sådant materiale fordampes. I mindre koncentration vil atmosfæren også indeholde magnesium, aluminium, kalcium og jern. Simuleringerne viser tillige, at natrium og kalium selv ved lave temperaturer forbliver i gasfasen.

Kilde: Chemistry of Silicate Atmospheres of Evaporating Super-Earths. L. Schaefer und B. Fegley, *Astrophysical Journal* **703**, L113 (2009). (Washington University i St. Louis).

Merkurs overflade næsten kortlagt

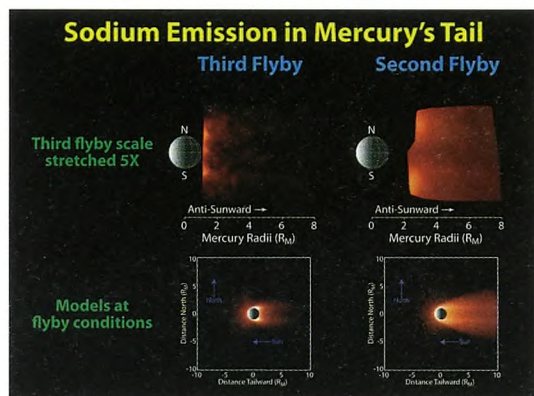
ASTRONOMI. Messengersonden foretog sin tredje passage af planeten Merkur den 29. september, hvor den optog billeder af yderligere 6 % af Merkurs overflade. Dette betyder at forskere nu har billeder af ca. 98 % af planetens overflade, hvilket er en klar forbedring, da man tidligere kun havde fotografier af knap halvdelen af Merkur.

Selvom Messenger kun har afdækket en begrænset del af Merkurs overflade under den sidste overflyvning, er der kommet interessante detaljer frem i lyset. Et eksempel på en spændende ting er det velbevarede dobbelt nedslagsbassin, der er vist på billedet. Det indre bassin er yngre end det ydre

bassin, der har en diameter på 290 km. Forskerne mener at der er gode muligheder for at finde det yngste vulkanske materiale på Merkur i indre bassin.



Messenger har ligeledes udført den mest omfattende undersøgelse af Merkurs ultratynde og flygtige atmosfære – også kendt som exosfæren. Merkurs tætte bane om Solen gør, at exosfæren får en hale af neutrale natrium (sodium) atomer – svarende til en komets hale. Ved de to tidligere passager var der en tydelig kometlignende hale af natriumatomer, som ved den seneste passage var formindsket betydeligt. Man tolker fænomenet som et resultat af ændret årstid på Merkur. Observationerne viser desuden, at tætheden af calcium og magnesium i exosfæren ændres med årstiden. Denne ændring i sammensætning af exosfæren er ikke fuldt forstået af forskerne.



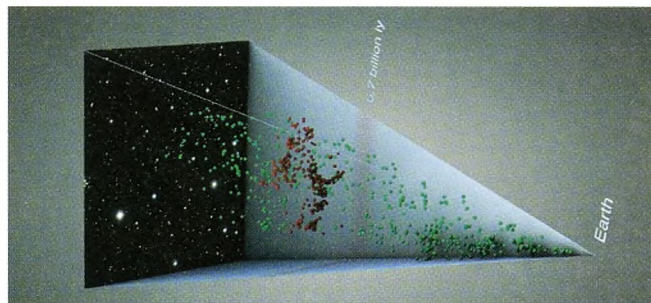
Fremtiden for Messenger er, at sonden skal bringes i omløb omkring Merkur i 2011. Der skal den udføre nogle mere kontinuerede studier af Merkurs exosfære, og dermed kan vi få en bedre forståelse af de processer, der har betydning for årstidsændringer af exosfæren.

Kilder: www.tycho.dk/article/view/5653; http://science.nasa.gov/headlines/-y2009/03nov_hiddenterritory.htm?list1340696.

Kosmiske storskalastrukturer

KOSMOLOGI. Dette er måske ikke nyheden, hvor astronomerne får kaffen galt i halsen. Det har længe været kendt at galakserne ikke er jævnt fordelt i Universet men klumper sig sammen i strukturer, der bedst kan beskrives som netværk af gigantiske tråde på kryds og tværs gennem rummet. Der, hvor trådene mødes, findes større samlinger af galakser – dvs. galaksehobe.

Når astronomerne alligevel er ramt af en vis kåthed, er det fordi det er første gang, at man har observeret en så rig struktur i det fjerne univers. Tidligere har man måtte nøjes med at kortlægge strukturer forholdsvis tæt på, men de nye observationer har afsløret storskalastrukturer i en afstand af ca. 6,7 milliarder lysår fra Jorden.



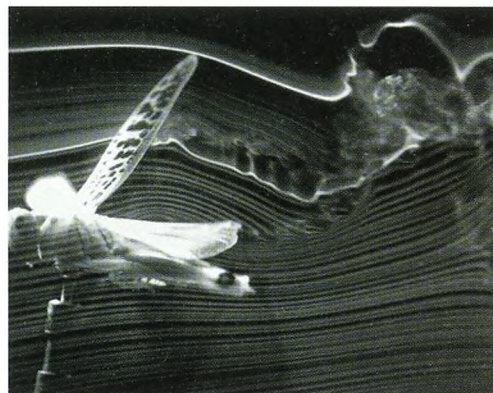
Illustrationen ovenfor angiver positionerne af galakserne og afslører den gigantiske samling af galakser. Galakserne i den nye struktur er vist med rødt, mens de grønne prikker repræsenterer galakser, der enten er foran eller bagved strukturen. Strukturen er enorm, idet den strækker sig over 60 millioner lysår, og hoben er formentlig 10.000 gange tungere end vores egen galakse. Der er noget der tyder på, at strukturen er endnu større end de nuværende observationer viser. Astronomerne er derfor i gang med at forberede nye observationer, der kan afklare strukturens størrelse.

De nuværende observationer er et resultat af et internationalt samarbejde mellem Japans Subura teleskop, der drives af National Astronomical Observatory of Japan, og ESO's Very Large Telescope. Under ledelse af Masayuki Tanaka fra ESO har man bestemt afstandene til alle galakserne ved hjælp af spektroskopiske observationer.

Kilder: www.tycho.dk/article/view/5651; www.eso.org/public/denmark/press-rel/pr-2009/pr-41-09.html

Græshopper flyver interkontinentalt

AERODYNAMIK. Fascineret af den effektivitet, hvormed græshopper flyver, har forskere nu set nærmere på de aerodynamiske aspekter. Overhovedet at få en præcis viden om vingernes bevægelsesmønstre her været lidt af et projekt. Græshoppens vinger bevæger sig hurtigt og vingerne er i sig selv fleksible og ændrer konstant form under flyvning.



Med højhastighedskamera og en vindtunnel lykkedes det at skaffe så mange data, at der kunne laves en 3D-model af vingernes bevægelser, så aerodynamikken kunne eftergøres i en computer. Efter at have bestemt de parametre, som fik simuleringen til at passe med virkeligheden, prøvede man at ændre vingernes egenskaber. Fra at være som i virkeligheden, fleksible, blev de gjort stive. Desuden lod man folder og bugter på græshoppens vinger forsvinde. I begge tilfælde fik man en "græshoppe", som kunne flyve, men det nødvendige energiforbrug var samtidig vokset.

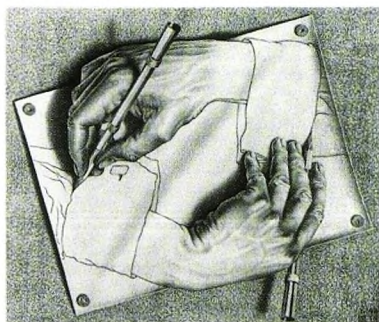
Kilde: Details of Insect Wing Design and Deformation Enhance Aerodynamic Function and Flight Efficiency, J. Young et al.; *Science* 325, 1549 (2009).

Gödel, Escher, Bach – Et evigt gyldent bånd

Af Torsten Freltoft, Sophion Bioscience A/S og KVANT

Bogen om sammenhængen mellem matematikeren Kurt Gödel, kunstneren M.C. Escher og komponisten Johan Sebastian Bach og deres respektive videnskabelige og kunstneriske arbejder.

Gödel, Escher, Bach eller blot GEB er skrevet af den amerikanske fysiker Douglas Hofstadter og blev første gang udgivet i England 1979. På overfladen behandler bogen de tre personer og afdækker fælles temaer i deres liv og arbejder. På et dybere niveau er bogen en detaljeret indføring i fundamentale koncepter inden for matematik, symmetri og intelligens.



Figur 1. "Drawing Hands" af M.C. Escher (litografi, 1948) bliver brugt i bogen bl.a. som illustration af begrebet selvreference/rekursion.

Gennem illustrationer og analyser beskriver bogen, hvordan rekursivitet (selvreference) og formelle regler tillader systemer at få mening på trods af tilsyneladende meningsløse bestanddele. Den diskuterer også, hvad det overhovedet vil sige at kommunikere, hvordan viden kan repræsenteres og gemmes, metoder og begrænsninger for symbolske repræsentationer og endelig giver den et bud på, hvad begrebet "mening" egentlig er.

Til folk som har været forvirrede over, hvad bogen egentlig handler om, har Hofstadter sagt, at GEB ikke handler om hverken matematik, kunst eller musik, men snarere om (kunstig) intelligens, og hvordan erkendelse og tænkning opstår baseret på skjulte neurologiske mekanismer. Men analogier mellem matematik, kunst og musik bruges i allerhøjeste grad som illustration af relevante begreber. I bogen beskriver han bl.a. et billede på, hvordan de individuelle neuroner i hjernen koordinerer deres aktivitet for at skabe en samlet opfattelse af bevidsthed ved at sammenligne det med den sociale organisation, der kommer til udtryk i en myretue.

Achilleus og skildpadden

I bogen sammenvæves forskellige fortælleformer. Hovedkapitlerne skifter imellem dialoger mellem opdigtede karakterer inspireret af Lewis Carrolls klassiske

fremstilling: "Hvad skildpadden sagde til Achilleus". Her diskuterer Achilleus og skildpadden paradokser relateret til deduktion. Hofstadter baserer de andre dialoger på denne og introducerer andre medvirkende. Ofte behandler disse historier emner som selvreference og metafiktion.

GEB introducerer også ordspil for at illustrere paralleller som f.eks. "The Magnificrab, Indeed" sammen med Bachs musikstykke "Magnificat in D" eller "SHRDLU, Toy of Man's Designing" sammen med Bachs "Jesu Joy of Man's Desiring".

En dialog i bogen er skrevet som en "krabbe kanon", hvor alle linierne før midten svarer til en identisk line efter midten. De enkelte replikker er så at sige spejlet i tekstens midtpunkt. Samtalen giver stadig mening fordi der benyttes almindelige sætninger, der f.eks. både kan bruges som "goddag" og "farvel" ligesom der anvendes linier som, hvis man studerer dem nøjere, både kan fungere som spørgsmål og svar.

Skjulte udfordringer

Bogen er fyldt med skjulte udfordringer eller opgaver. Et eksempel findes i kapitlet "Contracrostipunctus" som er en kombination af ordene "acrostic" (akrostikon¹) og "contrapunctus" (kontrapunktisk²). I en samtale mellem Achilleus og skildpadden giver forfatteren et praj om, at der er et kontrapunktisk akrostikon i kapitlet som refererer såvel til forfatteren (Hofstadter) som til Bach. Dette kan findes ved at tage det første ord i hvert afsnit: Hofstadter's Contracrostipunctus Acrostically Backwards Spells "J.S. Bach". Men dette er kun akrostikonet. Det kontrapunktiske akrostikon fås (som akrostikonet selv foreskriver) ved at tage det første bogstav i akrostikonet (fede typer) og læse det baglæns for at få: "J.S. Bach".

Selvom det hver gang har krævet en næsten fuldstændig omskrivning af bogen, så er GEB alligevel oversat fra originalsproget engelsk til en del andre sprog, bl.a. fransk, italiensk og kinesisk og sågar dansk!

Litteratur

- [1] Dougals R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, Harvester Press 1979; på dansk Gödel, Escher, Bach: Et evigt gyldent bånd, Aschehoug 1992.
- [2] Wikipedias (www.wikipedia.org) artikel om "Gödel, Escher, Bach".

¹ Et akrostikon er tekst, hvor første eller sidste bogstav i hvert ord eller hver linie tilsammen danner en selvstændig mening.

² Kontrapunktisk er betegnelsen for en teknik inden for musikalsk komposition, hvor de forskellige stemmer hver især udgør selvstændige melodier, der passer sammen.

Foreningsnyt – foredrag i foråret

Dato	Tid	Foredragstitel	Foredragsholder	Forening
Jan.				
25/1	19.30	“Homo Communicator”. Kommunikationens Historie. Fra brevdUER til Internet og Digitalt TV	<i>Ole Mørk Lauridsen</i>	SNU
Feb.				
1/2	19.15	Mørk kosmologi	<i>Peter Laursen</i>	AS (Kbh)
8/2	19.00	Mørk kosmologi	<i>Peter Laursen</i>	AS (Årh)
15/2	19.30	Det moderne digitale fjernsyn, hvad kan det?	<i>Carsten Corneliussen</i>	SNU
Mar.				
1/3	19.15	Om vand og asparges på Mars	<i>Kristoffer Leer</i>	AS (Kbh)
8/3	19.00	Om vand og asparges på Mars	<i>Kristoffer Leer</i>	AS (Årh)
8/3	19.30	Rumkommunikation	<i>John Leif Jørgensen</i>	SNU
29/3	17.00	Virksomhedsbesøg	(kun for medlemmer af SNU)	SNU
Apr.				
12/4	19.15	Titel ikke fastlagt	<i>Jacob Trier Frederiksen</i>	AS (Kbh)
19/4	19.00	Titel ikke fastlagt	<i>Jacob Trier Frederiksen</i>	AS (Årh)
19/4	19.30	Det mekaniske TV. Hvordan det hele begyndte	<i>Benny Ahlburg</i>	SNU
26/4	19.15	Hvor er Solens pletter og hvad betyder de for klimaet?	<i>Christoffer Karoff</i>	AS (Kbh)
Maj				
3/5	19.00	Hvor er Solens pletter og hvad betyder de for klimaet?	<i>Christoffer Karoff</i>	AS (Årh)
17/5	19.15	At forstå stjernernes musik: Asteroseismologi med Kepler	<i>Rasmus Handberg</i>	AS (Kbh)
31/5	19.00	At forstå stjernernes musik: Asteroseismologi med Kepler	<i>Rasmus Handberg</i>	AS (Årh)

Foredragene afholdes på følgende adresser:

AS (Kbh): Auditoriet, Juliane Maries Vej 30, 2100 København Ø (www.astronomisk.dk).

AS (Årh): Matematisk Inst., Aarhus Universitet, Ny Munkegade, Bygn. 1530, Aud. D2, 8000 Århus C.

SNU: Geologisk Museum, Øster Voldgade 5-7, 1350 København K (www.naturvidenskab.net).

Selskabet for Naturlærens Udbredelse

Temaet for forårets foredragsrække er *Kommunikation*. Efter foredraget den 19. april er der generalforsamling for Selskabets medlemmer.

Astronomisk Selskab

Temaet for forårets foredragsrække er *Fremtidens forskere*. I foredragsserien præsenterer fem unge forskere deres projekter. Vi får et indblik i, hvad der vil være de aktuelle emner indenfor udforskningen af himmelrummet i de kommende år. Emnerne spænder vidt – lige fra udforskningen af vores eget solsystem med satellitter og rumsonder til de mekanismer, der styrer de fjerne galakser og hele Universets udvikling på stor skala. Foredragene afholdes i samarbejde mellem Astronomisk Selskab, Tycho Brahe Planetarium og Folkeuniversitetet i Århus. De er tilrettelagt af Torben Arentoft og Anja Andersen.

Andre foreninger med foredrag:

Videnskabshistorisk Selskab

H.C. Ørsted Instituttet,
aud. 10, Universitetsparken 5, 2100 København Ø
(www.math.ku.dk/videnskabshistorie)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

(www.unf.dk)

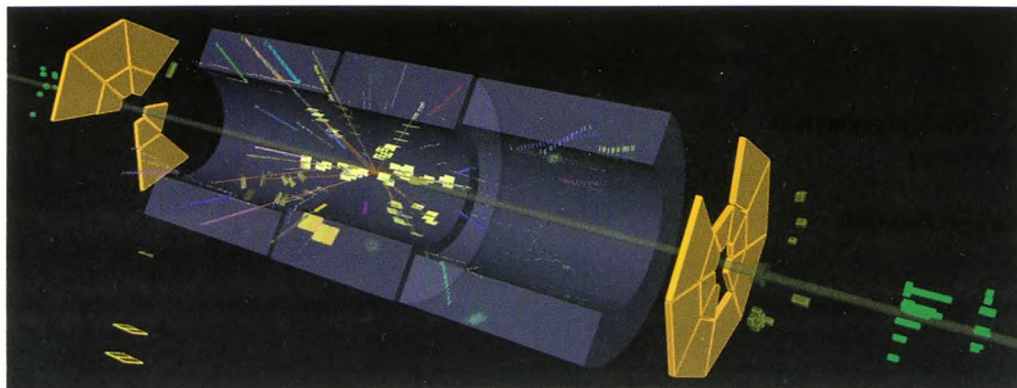
Large Hadron Collider er tilbage

Det er over et år siden, at CERN's Large Hadron Collider (LHC) blev ramt af et større uheld, da en forbindelse mellem to superledende magneter fik for stor modstand (på ca. 100 nano-ohm). Det førte til en opvarmning, der ikke kunne klares af kølesystemet, hvilket igen førte til yderligere forøgelse af den elektriske modstand, hvorved forbindelsen brændte sammen. Den flydende helium, som køler magneterne, lækkede og medførte en eksplosion. Sammenbruddet betød, at der måtte udskiftes 53 magneter (dipoler og kvadrupoler) samt nogle af vakuumkamrene, hvor protonstrålerne bevæger sig. Flertallet af kamrene skulle heldigvis blot renses. Da teknikerne undersøgte resten af sektionerne fandt de en forbindelse, der kunne have ført til endnu et sammenbrud. Et nyt meget kompliceret overvågningssystem skal sikre, at der ikke kommer for stor modstand i overgangene mellem magneterne i fremtiden. Reparationerne var først færdige i maj.

Efter en ca. 10 uger lang nedkøling, til blot 1,9 grader over det absolutte nulpunkt, begyndte tingene at tage fart. I midten af november havde man sendt protoner halvvejs rundt i LHC'en. En protonstråle med et relativt lille antal partikler blev sendt først én gang imod

og derefter den anden vej rundt med uret.

Nogenlunde samtidigt kom professor Holger Bech Nielsen i mediernes søgelys med teoretiske spekulationer om, at LHC'en aldrig ville komme op at køre. Naturen skulle automatisk blokere for at lave Higgs-bosonen, der også er kendt som "gude-partiklen". Det har dog ikke forhindret ingeniørerne på CERN i at starte LHC'en igen. Dette skete den 20. november, hvor to teststråler med (kun) en milliard protoner blev sendt rundt i hver sin retning ved en injektionsenergi på 450 GeV. Der skulle kun gå yderligere tre dage før man bragte de to protonstråler til kollision flere steder i maskinen. Ved denne lejlighed registrerede bl.a. ATLAS-eksperimentet de første kollisioner i detektoren nogensinde. Testene var meget vellykkede, og teknikerne fortsatte med at imponere ved at accelerere protoner op til 1,18 TeV natten til den 30. november. Dermed slog LHC rekorden med højeste energi pr. partikelstråle og er nu verdens kraftigste partikelaccelerator. Håbet er, at accelerere og kolliderer flere protoner ved endnu højere energi – inden jul, så eksperimentalfysikerne kan få højenergikollisioner i julegave. I første kvartal af 2010 øges energien til 3,5 TeV pr. partikelstråle og antallet af protoner øges. I 2011 øges energien til 7 TeV.



To protonstråler ramte hinanden ved lav energi i ATLAS-detektoren den 23. november (CERN).