

KVANT

Oktober 1996 2

Fysisk Tidsskrift

7. årgang



• NEWTON OG SOLSYSTEMETS BEGYNDELSE • KAN NATURLOVE BEGRUNDES •

• NYT ISOTOPPUSLESPIL • KUNSTEN AT TÆLLE TREKANTER •

LØSSALGSPRIS: 35 KR

KVANT

Fysisk Tidsskrift

c/o Ørsted Laboratoriet
Niels Bohr Institutet
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø

Telefax : 35 32 04 60
E-mail : kvant@nbivax.nbi.dk
Giro : 5 84 31 46

Udgives af

Dansk
Fysisk
Selskab



Selskabet for
Naturlærens
Udbredelse



Redaktion

Mads Hammerich (ansv.)
Frederiksberg Gymnasium
Rasmus Kromann (annoncer)
Torsten Freltoft
NKT Research Centre
Jørgen Friis Bak
Naturvidenskabeligt fakultet, ÅU
Jørn Christiansen
Mogens Esrom Larsen
Matematisk Institut, KU
Finn Berg Rasmussen
Ørsted Laboratoriet, KU
Ove Østergaard
Silkeborg Amtsgymnasium

KVANT udkommer 4 gange årligt og er medlemsblad for de udgivende selskaber.
Abonnementspris: 135 kr/år (i Danmark).

Annoncepriser

1/1 side	3000 kr
1/2 side	1600 kr
1/4 side	1000 kr
Farvetillæg	1800 kr

Priserne er excl. moms og gælder for reproklart materiale. Henvendelser om annoncer til Rasmus Kromann, NKT Research Centre, telefon 43 48 35 00, telefax 43 63 00 99.

Oplag: 2000

Tryk: P.J.Schmidt, Vojens

ISSN 0905-8893

Indhold:

Newton, Gallilei og planeternes oprindelse

Tom Bøgeskov 1

Seksten og syttenhundredetallets fysik sejrede i forståelsen af solsystemets indretning og i opstilling af bevægelsesligningerne. Men hvordan begyndelsesbetingelserne er blevet etableret var endnu en gåde. Forfatteren diskuterer Newtons og Galileis forsøg på at analysere dette problem.

Kan naturlove begrundes? Om symmetri og dynamik

Kay Akselbo 9

Kay Akselbo tager som udgangspunkt at universet er isotropt. På denne baggrund begrundes han bevægelseslovene.

Meddelelser fra Dansk Fysisk Selskab

Preben Alstrøm 15

DFS - årsmødeberetning, regnskab og status.

Isotoper i et puslespil

Søren Rasmussen 18

Søren Rasmussen kigger efter ens træk hos isotoperne i kernekortet. Hvis isotoperne tænkes sammensat af elementer, hver på tre eller fire nukleoner, kan han lægge et puslespil hvor rækker af kerner med ligheder i elementfordelingen også har lignende stabilitetsforhold.

Den evige trekant – eller kunsten at tælle

Mogens Esrom Larsen 21

Hvor mange trekanter er der i et korthus? Med dette problem som eksempel gennemgår forfatteren samtlige kendte løsningsmetoder og kommer herunder rundt i hele den kombinatoriske tælleteknik.

Forsiden:

Guds hånd! Hjalp ikke kun fodboldspilleren Diego Maradona med at få bolden i kassen, men også Newton med at få anbragt planeterne i deres baner. På dette titelblad til Giambattista Riccioli's *Almagestum Novum* (1651) ses englene som Guds hjælpere der fremfører Solen og planeterne. Fra Skaberens hånd udgår numerus (tal), mensura (mål) og pondus (vægt). Astrea og Argus er i gang med at veje verdenssystemerne mod hinanden, mens Ptolemæus har givet fortabt. Læs artiklen side 1.

Newton, Galilei og planeternes oprindelse

Tom Bøgeskov



Solsystemets begyndelsesbetingelser

Jens M. Knudsen og Poul G. Hjorth har i deres nye bog⁴ et par bemærkninger til spørgsmålet om solsystemets oprindelse. De skriver: "Baneformen er ikke blot bestemt af Newtons love, men også af begyndelsesbetingelserne. Denne kendsgerning gør det muligt at finde ud af noget om solsystemets oprindelse. Den kendsgerning at planetbanerne næsten ligger i samme plan har noget at gøre med systemets begyndelsesbetingelser, og er ikke foreskrevet af kraft- og bevægelseslovene." (side 362)

"Solsystemet er formet som en skive vinkelret på den oprindelige impulsmomentvektor. Alle planeterne bevæger sig i samme retning rundt om Solen, den oprindelige rotationsretning (for den gas- og støvsky, som omgav den nyfødte sol). Solsystemet "husker sin fødselsproces", dvs. begyndelsesbetingelserne". (side 234)

Og om Månen skriver de: "Månen er ganske enkelt "blevet tildelt" en begyndelseshastighed vinkelret på Jordens gravitationsfelt og af en sådan størrelse, at Månen til trods for dens stadige fald mod Jordens centrum aldrig kommer nærmere jordoverfladen." (side 17)

Det er interessant, at det præcis er de samme fænomener (fælles baneplan og omløbsretning; "tildelingen" af en bestemt størrelse for den tværgående hastighed) og indsigten i bevægelseslovenes begrænsede forklaringskraft, der ligger til grund for de overvejelser over solsys-

temets oprindelse, vi finder hos den klassiske mekaniks pionerer: Galilei og Newton. Mens Newton lægger begyndelsesbetingelserne i hænderne på en almægtig Gud, så præsenterer Galilei en fantastisk "teori", forklædt som en Platonmyte. Som vi skal se, krydser denne Platonmyte også Newtons overvejelser over solsystemets oprindelse.

"Den Universelle Hersker"

Newton var i årene efter udgivelsen af Principia Mathematica (1687) udsat for en skarp teologisk kritik, der undertiden slog over i anklager for ateisme. De to vigtigste frontfigurer i denne kritik var filosofferne Leibniz og George Berkeley. Som en reaktion herpå forsynede Newton Principias andenudgave (1713) med et afsluttende kapitel (General Scholium), som for en stor del udgøres af teologiske betragtninger. Newton argumenterer her for nødvendigheden af en overnaturlig guddommelig kraft i naturen, dvs. en kraft, som er en forudsætning for at naturen kan fungere, som den gør, men som der ikke kan redegøres for ved hjælp af naturlovene.

Newtons hovedargument er netop solsystemets funktionsmåde. Gravitationsloven og bevægelseslovene kan gøre rede for, hvordan planeterne bevæger sig. Men problemet er, at lovene ikke kan forklare, hvordan disse bevægelser er sat i gang, ligesom de heller ikke kan forklare den fælles baneplan og cirkulationsretning. Kometerne kredser jo også omkring Solen i (meget ekscentriske) ellipsebåner, som går gennem det samme gravitationsfelt som planetbanerne, men alligevel bevæger de sig i alle mulige retninger og planer, hvorfor der ikke kan være naturlige mekaniske årsager til planeternes fælles baneplaner og omløbsretninger.

"Solens, planeternes og kometernes allerskønneste system - skriver han - kan kun være fremgået af et tænkende og magtfuldt Væsens beslutning og herredømme"^{5, p. 544}; et Væsen, som "styrer alle ting", er "Herre over alt", er "den Universelle Hersker", og som i øvrigt (som han siger andet steds) "er særdeles velbevandret i mekanik og geometri."

Newton drager den, måske overraskende, slutning, at ræsonnementer over Gud "på grundlag af naturfænomenerne afgjort hører til naturfilosofien."^{5, p. 546}

Planetbevægelsen, naturlig og guddommelig

En væsentlig kilde til Newtons naturfilosofiske metafysik udgøres af fire breve, som han skrev ved årsskiftet 1692-93 til Richard Bentley⁶.

Bentley (1662-1742), der i øvrigt blev initiativtageren til nyudgivelsen af Principia i 1713, og som i 1692 var kapellan i London, var i dette år blevet udset til at holde de første "Boyle Lectures". Fysikeren Robert Boyle, som var

død året før, havde testamenteret en årlig rente til afholdelse af 8 forelæsninger om året med det formål at bevise den kristne tros sandhed. Bentleys første forelæsninger havde gjort brug af Newtons Principia i et forsøg på at vise, at den nye videnskab ikke førte til materialisme, men tværtimod udgjorde et solidt grundlag for materialismens tilbagevisning. Bentley, som var teolog og en af sin tids bedste klassiske filologer, men uskolet i naturvidenskab, søgte hjælp hos Newton for at få afklaret, hvilken plads "Gud skaberen" måtte have i den newtonske kosmologi.

Jeg koncentrerer mig i det følgende om de afsnit i brevene, der behandler solsystemets begyndelsesbetingelser, dvs. "den guddommelige faktor" i planetbevægelsen.

Newton, der i brevene behandler planetbanerne som cirkulære, opfatter planetbevægelsen som sammensat dels af et fald mod Solen forårsaget af gravitationskraften og dels af en tværgående inertialbevægelse, der bevarer sig selv, og ikke har brug for nogen kraft for at forløbe. Dvs. at planetbevægelsen kan beskrives uden at inddrage andre kræfter end netop gravitationskraften, der virker langs akse mellem Solen og planeten.

Men nu er spørgsmålet: Hvordan er denne tværgående bevægelse opstået i et univers, hvor der (ifølge Newtons hypotese) oprindeligt ikke er andet end jævnt fordelt materie, og hvor der mellem materiedelene kun virker gravitationskræfter? Frembringelsen af den for banebevægelsen nødvendige tværgående bevægelse bliver uforklarlig, da de eneste eksisterende kræfter står vinkelret på denne bevægelse - der mangler en impuls til igangsættelse af inertialbevægelsen.

Newtons bud på en løsning er enkel. Han skriver til Bentley: "Jeg kender ingen magt i naturen, som kunne forårsage denne tværgående bevægelse, bortset fra den guddommelige arm."^{6,p.52}

Men der er mere: For denne guddommelige tværgående impuls er ikke blot som sådan tilstrækkelig for at få planetsystemet til at fungere. Den må også være af en nøje afmålt størrelse, således at den tildeler hver enkelt planet præcis den bestemte hastighed, $v = \sqrt{GM/r}$, som er nødvendig for at planeten kan cirkulere i den givne afstand, r , fra Solen under indvirkning af kraften fra Solens masse, M .

Newton skriver til Bentley: "Der findes heller ikke nogen naturlig årsag, som kunne give planeterne de præcise hastigheder, som kræves i forhold til deres afstande fra Solen og andre centrallegemer for at få dem til at bevæge sig i koncentriske baner omkring disse legemer (...) Der krævedes, for at frembringe dette system med alle dets bevægelser, en årsag, som kunne begribe og sammenholde Solens og planeterne respektive masser og de gravitationskræfter, der udgår fra dem, primærplaneterne respektive afstande fra Solen og de sekundære planeters afstande fra Saturn, Jupiter og Jorden, og de hastigheder, hvormed disse planeter kunne kredse omkring de masser, som er indeholdt i centrallegemerne. Nødvendigheden af at kunne sammenholde og tilpasse alle disse ting hos så stor en variation af legemer overbeviser om, at denne årsag

ikke er blind og tilfældig, men er særdeles velbevandret i mekanik og geometri."^{6,p.48f}

Platonmyten

Newton går imidlertid et skridt videre i sine overvejelser over tilblivelsen af planeterne cirkulationshastigheder. De kunne måske frembringes ved hjælp af gravitationskræfter, dvs. ved et tidsafgrænset accelereret fald. Han inddrager hertil den franske feltmarskal Blondel, som i 1683 havde udgivet et ballistisk værk: *L'art de jeter les bombes* (Kunsten at kaste bomber):

"Blondel - skriver Newton til Bentley - fortæller os et sted i sin bog om bomber, at Platon hævder, at planeterne bevægelse er beskafne som om de alle var skabt af Gud i en region meget fjernt fra vores system og derfra er faldet mod Solen; og straks de ankom til deres respektive baner, blev deres faldbevægelse drejet til siden og ændredes til en tværgående bevægelse. Og dette er rigtigt, hvis man forudsætter, at Solens gravitationskraft var fordoblet i det øjeblik, hvor de alle ankommer til deres respektive baner. Men i så fald er den guddommelige magt påkrævet i to henseender, nemlig til at dreje de faldende planeters bevægelse til siden, og på samme tid, til at fordoble Solens tiltrækningskraft.

Tyngden kan altså sætte planeterne i bevægelse; men uden den guddommelige magt kunne den aldrig sætte dem i en cirkulerende bevægelse omkring Solen af den art, som de har. Og derfor, af denne som af andre grunde, er jeg tvunget til at henføre indretningen af dette system til et tænkende og handlende Væsen."^{6,p.52f}

Galilei og Platonmyten

Som det fremgår af Bentleys næste brev, er han forståeligt nok lidt forvirret med hensyn til, hvordan det hele hænger sammen. Men det er også i dette brev, han gør Newton opmærksom på, at han har fundet den samme Platon-myte hos Galilei, som hævder, at man kan finde planeterne faldhøjde, og dermed det oprindelige sted for deres dannelse, ved hjælp af accelerationsloven for det frie fald, blot man kender planeterne cirkulationshastigheder og afstanden mellem deres baner.

Men han må have taget fejl, skriver Bentley, for han kendte ikke loven om tyngdens aftagen med kvadratet på afstanden fra centrallegemet.

Blondels kilde til myten er utvivlsomt Galilei. Men Galileis kilde? Ja, Platon er det næppe, idet myten ikke findes i de bevarede Platonskrifter, og tilsyneladende heller ikke i andre antikke kilder. Det er da overvejende sandsynligt, at ikke blot angivelsen af Platon som ophavsmand, men også myten selv er Galileis egen opfindelse. Måske - men også kun måske, for Galilei var en filur - er myten hans egen maskerede teori om planetsystemets oprindelse. Den "platoniske" planetteori fremstilles i begge Galileis hovedværker^{1,2}, der er skrevet som dialoger mellem de tre figurer: Salviati (Galileis talerør), Sagredo (den sunde fornuft) og Simplicio (ptolemæer og aristoteliker). I "Discorsi" skriver han: "Sagredo: Platon siger, at Gud,

FRA VORT STORE PROGRAM

VARIAN

Turbopumper
Ionpumper
Oliediffusionspumper
Læksøgere
Vacuum måleudstyr
UHV & HV fittings

DCA Instruments

Fremstilling af UHV anlæg til:
Sputterprocesser
MBE
Tyndfilm deponering
Overfladeanalyse
samt kundespecificeret UHV kamre

Lake Shore Cryotronics

Lavtemperatur kontrollere
& sensorer
Elektromagneter & strømforsyninger
Gaussmetre & Hall elementer
VSM (vibrating sample magnetometer)
AC/DC magnetometer - susceptometer

Oxford Applied Research

Reaktive atomkilder
Mini E-beams
Quartz micro vægte
Ioniserede doping
K-celler
Substratholdere i
UHV udførelse
Rheed Guns
Magnetronkilder
Ion cleaning Guns
Fokuserende
elektronkilder
Scanning Ionkilder

Leda - Mass

Quadrupoler / RGA
Windowsbaseret software
Specielt design til
sputterprocesser
ion implantering
tyndfilm
optisk coating
acceleratorer
overfladeanalyse m.m.

APD cryogenics

Close cycle kryostater ned til 6,5 °K
Open cycle kryostater ned til 2 °K
Cryotiger fra 80 °K til 120 °K
Kryopumper

AAGE CHRISTENSEN A/S

Skelmosevej 10, DK-2500 Valby Tlf. 36 44 24 44 Fax 36 44 20 24



efter at have skabt de bevægelige himmellegemer, for at tildele dem de hastigheder, hvormed de siden i jævne cirkelbevægelser skulle bevæge sig for evigt, fik dem til fra hviletilstanden at bevæge sig bestemte vejlængder med den naturlige og retlinede bevægelse, hvormed vore jordiske legemer påviseligt bevæger sig, når de falder accelereret fra hviletilstanden. Og han tilføjer, at når de havde opnået den tiltænkte hastighed, som de siden skulle opretholde evigt, så omformede han deres retlinede bevægelse til en cirkulær bevægelse, som alene er i stand til at bevare sin jævne hastighed." (Inertialbevægelsen er cirkulær hos Galilei)

Sagredo stiller det oplagte spørgsmål, om "vores forfatter" (dvs. Galilei) ikke har været nysgerrig efter at beregne den afstand, hvorfra planeterne må være faldet? Salviati svarer:

"Jeg mener at kunne huske, at han har fortalt mig, at han engang har foretaget denne beregning, og fundet den i fin overensstemmelse med observationerne. Men han var ikke villig til at tale om det, idet han mente, at det i betragtning af den harme, mange af hans nye opdagelser havde fremkaldt, blot ville antænde nye luer. Men hvis nogen skulle have lyst til noget sådant, så kan man gøre det selv på grundlag af læren i nærværende afhandling."^{2, p. 265 f}

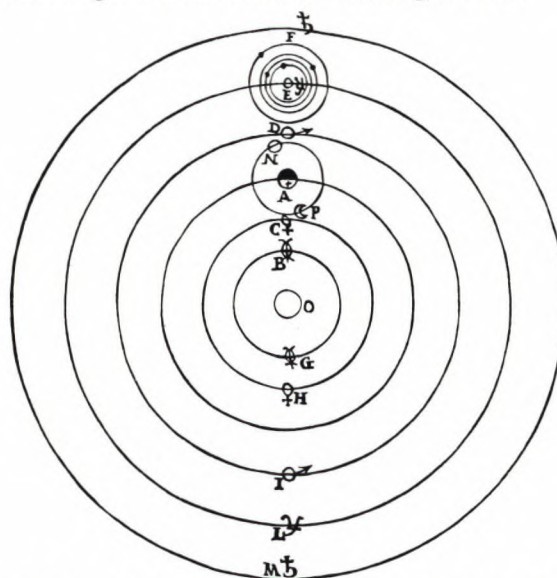
Denne opfordring bør vi ikke sidde overhørig, for der findes intetsteds hos Galilei selv beregninger til bestemmelse af planeternes "oprindelige sted", eller som den tredje dialogpartner, aristotelikeren Simplicio, siger: "sædet for den første årsag".



Filuren Gallileo efter et kobberstik fra 1624 af Ottavio Leoni

Derimod finder vi i "Dialogen om de to systemer" anvisninger på, hvordan disse beregninger kan foretages:

"For at foretage denne undersøgelse må man hos de mest kyndige astronomer indhente oplysninger om størrelserne af de cirkler, hvori planeterne kredser, og om deres omløbstider"... "Af forholdet mellem Jupiters og Saturns hastigheder, af afstanden mellem deres baner og af proportionen for den naturlige bevægelses acceleration, kan man finde i hvilken højde og afstand fra deres cirkulationscentrum det sted befandt sig, hvorfra de er udgået. Har man fundet det, så undersøger man, hvordan det forholder sig med Mars, hvis den falder derfra til sine bane, og finder at størrelsen af banen og hastigheden er i overensstemmelse med det beregnede; og tilsvarende gør man for Jorden, Venus og Merkur."^{1, p. 37 f}



Gallileis model af det kopernikanske system. Hentet fra "Dialog om de to verdenssystemer". De fire Jupitermåner blev opdaget af Gallilei i 1610.

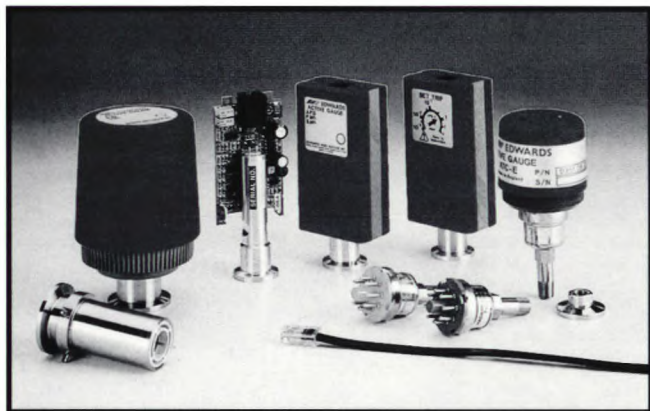
Galileis lære modsiger myten

Men det er næppe sandsynligt, at Galilei nogensinde skulle have foretaget disse beregninger - og det er umuligt, at de skulle have givet resultater, som stemte overens med observationerne.

For det første kendte Galilei ikke "proportionen for den naturlige bevægelses acceleration". Det er en grundløs vandrehistorie, når man undertiden i nyere litteratur kan læse, at Galilei målte tyngdeaccelerationen til $9,8 \text{ m/s}^2$. Og for det andet var han uvidende om, at tyngdeaccelerationen er en funktion af afstanden fra centrallegemet og dets masse.

Men dertil kommer det bemærkelsesværdige, at det er såre enkelt at vise, at myten behandlet på grundlag af Galileis egen bevægelsesteori fører til absurditeter:

Galilei opfattede planetbevægelserne som jævne cirkelbevægelser. Og om jævne bevægelser siger han: "Hvis to legemer bevæges jævnt, vil forholdet mellem hastighederne være produktet af forholdet mellem de gennemløbne afstande og det omvendte forhold mellem de forløbne tider."^{2, p. 170}. Proportionen for forholdet mellem



Active gauges er et nyt koncept til vakuummåling. Målehovedet indeholder hele elektronikken til måleudstyret og kræver derfor kun en standard DC strømforsyning. Udgangssignalet er 0 - 10V DC. Udlæsningen kan foregå på et almindeligt måleinstrument, PLC eller på en computer. Derved er der bedre mulighed for dokumentation ved f.eks. produktionskontrol. Fordelen ved denne konstruktion er bl.a., at man ikke behøver at have målehoved og måleudstyr i nærheden af hinanden. Kabler kan leveres i længder på op til 100 meter.

Pris pr. målehoved fra kr. **2.540,-** ex. moms

EDWARDS

Rotationsvakuumpumpe type RV er en ny oliepumpe, som både er en et- og to-trins pumpe, da der er mulighed for med en drejeknap at øge luftgennemstrømningen. Denne mulighed er der ingen andre vakuum-pumper på markedet der har. Pumpen leveres i 4 størrelser 3,7 - 5,8 - 9,7 - 14,2 m³/h.

Edwards RV pumper er velegnet som kemipumpe til f.eks. geltørring, centrifugering og frysetørring. Er også velegnet til rene systemer, hvor der kræves lavt sluttryk. I laboratoriet vil man også påskønne det meget lave støjniveau på kun 48 dBA.



Buch & Holm A/S

Marielundvej 36 - 2730 Herlev ☎ 42 91 75 11 Fax 44 92 31 00

Saturns og Jupiters hastigheder, v , baneradier, R , og omløbstider, T , bliver da:

$$\frac{v_S}{v_J} = \frac{R_S}{R_J} \cdot \frac{T_J}{T_S}$$

Og indhenter man nu oplysninger fra periodens mest kyn-dige astronomer, f.eks. Kopernikus³ så finder man:

$$\frac{R_S}{R_J} = \frac{9,1750 \text{ AE}}{5,2191 \text{ AE}}; \frac{T_J}{T_S} = \frac{12 \text{ år}}{30 \text{ år}}$$

Dette giver et forhold mellem hastighederne på 0,7. Dette forhold skulle så være følgen af de to planeters jævnt accelererede bevægelse ad bestemte vejlængder, som det gælder om at finde.

Men for en jævnt accelereret bevægelse siger Galilei, at følgende er gældende: "forholdet mellem faldvejene er som kvadratet på forholdet mellem sluthastighederne."

Anvendes dette bliver forholdet mellem planeterne faldveje 0,49. Eller sagt på en anden måde: Jupiter er faldet dobbelt så langt som Saturn. Det "fælles sted" for Saturns og Jupiters oprindelse må da være beliggende i en afstand, S_S , fra Saturns bane, der er lig afstanden mellem Saturns og Jupiters baner. Dvs. i en afstand af $2 \cdot R_S + R_J = 13,13 \text{ AE}$ fra Solens centrum. Men for at opnå banehastighederne ved fald fra denne afstand, må de være faldet med en acceleration af størrelsen $a = v^2/2 \cdot S = 0,47 \text{ AE}/\text{år}^2$

Og nu går det for alvor galt: For lader man derefter Mars og Jorden falde med denne acceleration fra det "fælles sted", så må de for at opnå deres banehastigheder falde henholdsvis 24 og 42 AE og dermed havne på den anden side af Solen i afstande, der går ud over Saturns bane, samtidig med at målesystemet for længder og tider bryder sammen.

Den eneste observation, der er forenelig med ideen i planetmyten, er den kvalitative (som Galilei også henviser til), at de fjernere planeter bevæger sig langsommere end de nærmere. Myten er, set i dette perspektiv, tydeligvis tænkt som en støtte til det kopernikanske system.

Newton og Galileis myte

Men vi har endnu ikke med disse betragtninger bevist mytens fysiske umulighed, idet den bygger på Galileis egne forudsætninger, som på et væsentligt punkt var forkert: For Galilei var tyngde ikke (som hos Newton) en afstandsafhængig relation mellem masser, men en iboende egenskab ved legemer. Et legeme har altså samme absolutte tyngde uanset dets position. Og alle legemer falder med samme konstante acceleration uanset om de falder mod Jorden fra "skæve tårne", eller fra, f.eks. Månens afstand - eller de falder mod Solen fra vilkårlige afstande. Tyngdeaccelerationen er overalt den samme. Lad os derfor igen gå til Newton og Bentley:

Melles Griot makes OPTICS, OPTO-MECHANICS, LASERS, INSTRUMENTS, and FIBER OPTICS



Contact Melles Griot for a fast response to your photonics needs. Our vast product selection described in our detailed product literature will provide solutions for a successful product or experiment.

Whether you need a single lens, or thousands of laser assemblies, Melles Griot is ready to deliver. From a single prototype to full-scale production, we can ship to your schedule. Melles Griot has earned a 25 plus year reputation as a quality manufacturer of optics, opto-mechanics, lasers, instruments, and fiber optics.

We have facilities in North America, Europe, and the Asia Pacific staffed with applications engineers ready to fulfill your requirements. You can reach us by phone, FAX, or the INTERNET.

From simple lenses to advanced fiber optics — Melles Griot is your *first choice* in photonics!

**Call, FAX, or E-mail us today
for your photonics solutions!**

Melles Griot Danmark
Stenagervej 13 • DK-4100 Ringsted
Phone: 53 61 50 49 • Fax: 53 61 60 49
E-mail: 101456.567@compuserve.com



■ OPTICS

- Beam Expanders
- Beamsplitters
- Coatings
- Custom OEM Optics
- Custom Optical Assemblies
- Cylindrical Optics
- Diode Laser Optics
- Filters
- Invaritar Lenses
- Lenses
- Micro Optics
- Mirrors
- Optical Design Software
- Polarizers
- Prisms
- Shutters & Irises
- YAG Lenses

■ OPTO-MECHANICS

- Breadboards
- Optical Tables & Isolators
- Opto-Mechanical Mounts
- Positioning Equipment
- Workstations

■ LASERS

- Diode Lasers & Assemblies
- Helium Neon Lasers

■ INSTRUMENTS

- Amplifiers
- Beam Position Measurement
- Beam Profilers
- Diode Laser Drivers
- Diode Laser Controllers
- Optical Spectrum Analyzers
- Power & Energy Meters
- Power Supplies
- Wavefront Analyzers

■ FIBER OPTICS

- Reflective Fiber Gratings
- Circulators
- Isolators
- Tree Couplers
- Attenuators
- Fiber Collimators

Canada
(613) 226-5880

France
(01) 3012-0680

Germany
(06251) 84060

Japan
(03) 3407-3614

Netherlands
(0316) 333041

Singapore
743-5884

Sweden
(08) 630-8950

Taiwan
(035) 729-518

United Kingdom
(01223) 420071

United States
(714) 261-5600

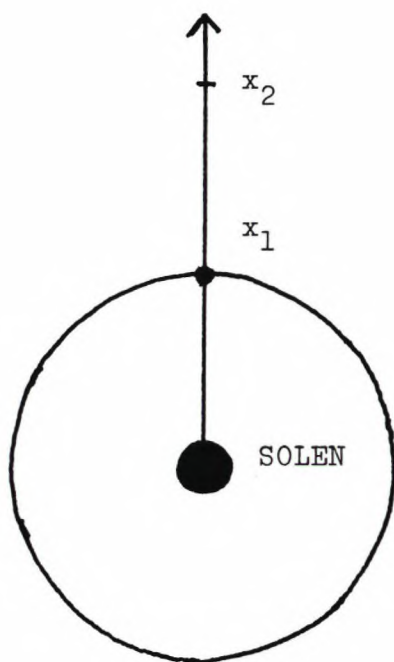
MELLES GRIOT

Sidstnævntes tydelige optagethed af myten får Newton til i korrespondancen at vende tilbage til den. Og hans konklusion er kort og godt, at ideen om et "fælles sted" kun er mulig, hvis man også indregner guddommelige mirakler. Han redegør nu for, hvordan planeterne faktisk ville opføre sig, hvis de under indvirkning af Solens kraft bevægede sig retlinet langs forlængelsen af forbindelsesaksen.

Newtons tilbagevisning af myten som en fysisk - men dermed ikke nødvendigvis mirakuløs - umulighed konkluderes på grundlag af to tankeeksperimenter hvor han lader planeterne falde fra en endelig henholdsvis uendelig afstand fra Solen.

I det tilfælde at planeterne falder fra en endelig afstand, skriver han: "Hvis vi antager, at alle planeternes tyngde mod Solen er af en sådan størrelse, som de faktisk er, og at planeternes bevægelsesmængde afbøjes opad, så vil hver planet stige til dens dobbelte højde over Solen. (...) og så, når de falder ned igen fra de steder, hvortil de var steget, vil de atter ankomme til deres respektive baner med de samme hastigheder, som de havde til at begynde med, og hvormed de nu kredser."^{4,p.56}

Newton fører ikke bevis for sine konklusioner i brevene, men henviser til propositionerne 33,34,36 og 37 fra Principias I.bog. Til kontrol af hans udsagn anvender vi mest hensigtsmæssigt den energilære, som blev udviklet i perioden efter Newton (Euler, Laplace, Lagrange).



Vi må forestille os, at planeten bevæger sig ud langs x-aksen fra begyndelsespositionen, x_1 , på planetbanen. Begyndeshastigheden $v(x_1)$ er lig cirkulationshastigheden. Opgaven er da at finde den afstand, x_2 , hvor den oprindelige kinetiske energi planetens arbejde mod tiltrækningskraften fra Solen vil være opbrugt, dvs. hvor hastigheden $v(x_2) = 0$.

Er kraften fra Solen $F = GMm/x$ og den potentielle

energi $U(\infty) = 0$, så er $U(x) = -GMm/x$, energisætningen giver da $v_2(x_1) = GM/x_1 - GM/x_2$

Men da størrelsen af cirkulationshastigheden er

$v(x_1) = \sqrt{GM/x_1}$, får vi:

$GM/2x_1 = GM/x_1 - GM/x_2$ eller $x_2 = 2x_1$, som jo netop er det resultat, der bekræfter Newtons udsagn om, at planeten "vil stige til dens dobbelte højde over Solen". Og ved et fald tilbage ad samme strækning finder vi, at sluthastigheden vil være $\sqrt{GM/x_1} =$ cirkulationshastigheden. Der findes altså ikke noget "fælles sted" i en endelig afstand. For de steder, hvorfra de måtte falde for at opnå de rigtige hastigheder, ville alle være i forskellige individuelle afstande fra Solen.

I det andet tankeeksperiment lader Newton planeterne falde fra en uendelig afstand. Men forudsætningen for at de i så fald kunne gå i cirkulation med den hastighed, hvormed de ankommer, er, at Solens tiltrækningskraft fordobles, når de ankommer til banerne.

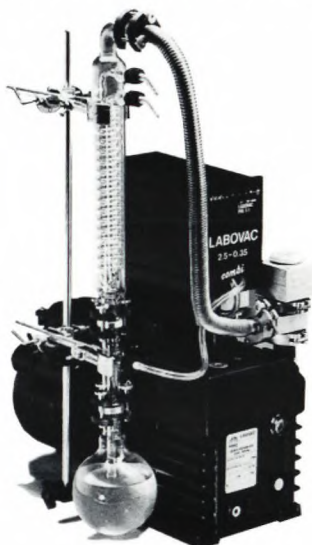
Newton skriver til Bentley: "Men hvis vi nu, i samme øjeblik planeternes cirkulationshastigheder drejes opad, halverer Solens tiltrækningskraft, som til stadighed retarderer deres opstigen, så vil de stige evigt, og de vil alle i lige afstande fra Solen bevæge sig med samme hastighed (...) Hvis de alle begynder at stige i samme øjeblik og langs den samme linie, så vil de til stadighed, mens de stiger, komme nærmere og nærmere hinanden, også deres hastigheder vil konstant konvergere mod den samme hastighed, og til sidst blive mindre end nogen angivelig hastighed. Antag derfor, at de blev ved at stige, indtil de næsten rørte hinanden, og deres hastigheder var blevet ubetragtelige små, og at alle deres bevægelser i det selvsamme øjeblik igen blev vendt om eller, hvilket er næsten det samme, at de blev frataget al bevægelse og faldt i dette øjeblik; de ville da alle til samme tid ankomme til deres respektive baner, enhver med sin oprindelige hastighed; og hvis deres bevægelser så blev drejet til siden, og Solens tiltrækningskraft samtidig blev fordoblet, således at den var stærk nok til at holde dem i deres baner, så ville de kredse i disse lige som før deres opstigen. Men hvis Solens tiltrækningskraft ikke blev fordoblet, så ville de forlade deres baner og fjerne sig til de højeste himle i parabelbaner."^{6,p.56f}

1. For at se at stighøjden x_2 i dette tilfælde er uendelig høj skal vi bruge samme ligning som før med samme begyndeshastighed, men den halve tiltrækningskraft. Vi halverer tiltrækningskraften ved at halvere Solens masse, M i højresidens udtryk for potentialforskellen, og får at $1/x_2 = 0$ hvilket medfører at x_2 er uendelig.

2. At planeternes stedsafhængige hastighed under denne rejse mod uendelig konvergerer mod nul ses af udtrykket for hastigheden: $v(x) = \sqrt{GM/x}$ som konvergerer med 0 når x går mod uendelig.

3. Der er en forenkling i Newtons ræsonnement, idet bevægelsen jo er evig, hvorfor planeterne aldrig vil nå frem til det "fælles sted", som er en grænseposition. Han lader da også tilbagerejsen begynde derfra, hvor "de næsten rører hinanden og deres hastigheder er ubetragtelige små".

MODERNE VAKUUMTEKNIK TIL FORSKNING OG INDUSTRI



SASKIA HOCHVAKUUM- UND LABORTECHNIK GmbH I ILMENAU er et succesrigt resultat af øst-vest genforeningen i Tyskland. SASKIA's et- og to-trins finvakuumpumper fra 4 til 200 m³h⁻¹ har rotor-skiver af et nyt PTFE materiale som sænker støjniveauet med ca. 3 dBA og tillader pumperne at arbejde konstant ved højt tryk eller med aggressive gasser. Med en frekvensregulering kan pumpehastigheden fordobles, så man f.eks. hurtigt kan evakuere et anlæg og derefter anvende pumpen som holdepumpe ved lav hastighed. SASKIA's kemisk resistente membran-pumper har liniærdrevne membraner, hvilket sikrer en lang levetid og lavt effektforbrug. En membranpumpe på ca. 30 W kan med de store afgifter på brugsvand hurtigt tjene sig ind, hvis den erstatter en vandstråle-pumpe. SASKIA's TOWER pumpestande er kemipumpestande kombineret med kondensatorer og med instrumentering for indstilling af trykket. SASKIA leverer oliefri pumpestande kombineret med turbomolekularpumper i et handy design og rootspumpestande op til 20.000 m³h⁻¹.

ALLE FORMER FOR OLIEFRI & OLIESMURTE ROTATIONSVAKUUMPUMPER • FEDTSMURTE TURBOMOLEKULAR- SPIRO- & HYBRIDPUMPER • DIFFUSIONS- & CRYOPUMPER • VAKUUMMÅLEINSTRUMENTER, VENTILER, HV & UHV FITTINGS • HELIUMLØKSØGERE & MASSESPEKTROMETRE • SPUTTER- ELEKTRONKANON & ÆTSEANLÆG • RF & HV STRØMFORSYNINGER • RUSTFRI SPECIALKAMRE & DELE • OMBYGNING AF VAKUUMANLÆG

**WENZEL VAKUUM TEKNIK APS • NYBROVEJ 283 • DK-2800 LYNGBY • TLF. 45 87 97 35
SHOWROOM, SERVICE, LAGER • NYBROVEJ 193 • BIL 30 42 63 00 • FAX 45 93 32 93**

4. Når planeterne kommer tilbage til banerne, er hastigheden $v(x_1) = \sqrt{GN/x_1}$. cirkelbevægelsen kræver da en centripetalkraft af størrelsen $F = GMm/x_1^2$, dvs. det dobbelte af det forudsatte. Sker denne fordobling ikke, vil den uændrede kraft ikke kunne fastholde planeten som så vil forsvinde, som Newton siger, langs en parabelbane.

5. Galileis "platoniske" planetteori er altså i alle henseender umulig - som naturproces. Den forudsætter i det mindste to mirakler: den tværgående ændring af planeternes bevægelsesretning og fordoblingen af Solens tiltrækningskraft

Det siges undertiden, at med Newton blev Gud fortrængt ud af verdensbilledet. Som det er fremgået, er dette lidt af en overdrivelse. Men der er det rigtige i det, at den newtonske mekanik åbnede for udviklingen af en videnskabelig verdensforklaring, hvor Gud, som Laplace små hundrede år efter Newton sagde det, blev en "overflødig hypotese".

I den moderne kosmogoni er en roterende gas- og støvsky således trådt i stedet for "den guddommelige arms" mirakuløse indgriben.

Referencer:

- 1) Galilei: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, telemaio e copernicano*. Torino, 1970, (1632).

- 2) Galilei: *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Torino, 1990 (1638)
- 3) Kopernikus: *On the revolutions of the heavenly spheres*, Chicago, 1952 (1543)
- 4) J.M.Knudsen og P.G. Hjorth: *Elements of Newtonian mechanics*, Berlin, 1995
- 5) Newton: *Mathematical principles of natural philosophy*, Berkeley, u.å. (1687, 1713, 1726)
- 6) Newton: *Newtons philosophy of nature. Selections from his writings*, Red: H.S. Thayer. New York, 1974



Tom Bøgeskov er mag.art. i litteraturvidenskab og har især beskæftiget sig med filosofi, idé- og videnskabshistorie.

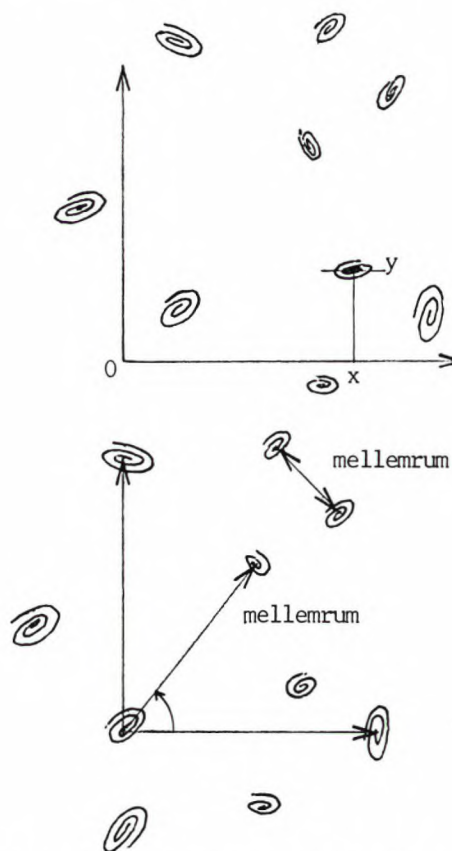
Kan naturlove begrundes?

Om symmetri og dynamik

Kay Akselbo

Naturlovene betragtes vel nærmest som en slags luner af naturen, som vi nok kan udforske, men ikke begrunde. Fx kender vi den Newtonske mekaniks love og ved, hvordan de fungerer, men vi ved ikke, hvorfor de er, som de er, eller om de måske kunne have været helt anderledes.

I det følgende søges det vist, at man under visse forudsætninger om universets grundstruktur kan udlede og dermed begrunde naturlove.



Figur 1. I det absolutte rum, øverst, anvendes det tomme rum som koordinatsystem. På denne baggrund er universet til ethvert tidspunkt fastlagt. Der kan eventuelt findes rum udenfor universet. Tiden går af sig selv.

I det ikke-absolutte rum nederst er universet selv det yderste koordinatsystem. På denne baggrund eksisterer rummet kun som "mellemrum" mellem dets objekter. Der kan derfor ikke findes rum udenfor universet. Tid er bevægelse i rummet - den måles på et ur.

Om tid og rum

I den fundamentale omvæltning i fysikken, som overgangen fra det Newtonske til det Einsteinske system har betydet, er den helt centrale bedrift Einsteins opgivelse af

absolut rum og tid. Newtons selvstændigt eksisterende tredimensionale verdensrum, hvori tiden uforstyrret går af sig selv, udskiftes med den almene relativitetsteoris fire-dimensionale tid-rum, som ikke har selvstændig eksistens uafhængigt af sit indhold, og hvor tid og rum er uløseligt sammenknyttet, idet tiden formelt indgår som en fjerde dimension på lige fod med de tre rumlige.

Det overraskende er nu, at det viser sig at være selve ikke-absolutheden - det uhåndgribelige i tid og rum - som konstituerer håndgribeligheden: Det dynamiske princip, hvoraf naturlove kan udledes.

Det kosmologiske princip

Det er en almindelig antagelse blandt kosmologer, at universets indhold af stof (masse/energi) er fordelt isotropt og homogent, dvs. at universet i stor (kosmologisk) målestok er ens overalt i alle retninger. Denne universelle symmetri kaldes "det kosmologiske princip".

Der er dog ikke tale om et egentligt fysisk princip, som fx energiens konstans - snarere betragtes det som en slags tilfældig termodynamisk konsekvens af universets udvikling - men da observationer synes at støtte denne struktur, har man valgt den som en arbejdshypotese af bekvemmelighedshensyn. Simple symmetriske modeller er de letteste at håndtere.

Imidlertid er det ikke svært med lidt bagklogskab at indse, at symmetrien er nødvendig: Hvis man ikke kan anskueliggøre en asymmetri på en symmetrisk baggrund (fx papir), kan det kun være, fordi man principielt ikke kan forestille sig den - dvs. den er uden mening. Asymmetri har altså, begrebsmæssigt som fysisk, kun mening på baggrund af symmetri, og denne må her være universet selv, da der ellers måtte findes en særlig, tom, symmetrisk baggrund for dette, hvilket kun har mening, hvis rummet er absolut og altså kan anvendes som koordinatsystem. Symmetrien er derfor principiel - den er et materielt udtryk for rummets ikke-absoluthed.

Om man nu vil forestille sig det jævnt fordelte stof som galakser eller galaksegrupper - eller måske blot som en slags idealiserede partikler - så kaldes disse enheder konventionelt for fundamentalpartikler, og iagttagere, som tænkes knyttet til dem, kaldes fundamentaliagttagere eller galaktiske iagttagere. Den nævnte struktur medfører, at universets ekspansion må være isotrop; og den enkelte galaktiske iagttager vil altså opfatte sig som værende i universets centrum, idet galakserne flygter radiært. For så vidt kan han bruge universet som lokalt koordinatsystem.

Vi vil da betragte det kosmologiske princip som et dynamisk princip:

Hvis universet principielt er homogent og isotropt fordelt, vil det modsætte sig ethvert forsøg på symmetribrud (man kan ikke med magt gøre rummet absolut). Ved en undersøgelse af denne modstand - de kræfter, der herved involveres - kan vi udlede naturlove.

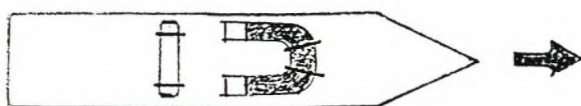
Homogenitet og inerti

Som tidligere antydte er der ved fordelingen af universets indhold tale om et gennemsnit. Den komplicerede uregelmæssighed, som universet udviser på enhver skala fra atomer til galaksegrupper, udlignes, efterhånden som større og større områder betragtes, til en homogen fordeling af universet som helhed; men i sit princip er homogeniteten absolut, da den er en konsekvens af rummets ikke-absoluthed, som ifølge sagens natur er absolut.

Dette må forstås således, at man ikke kan flytte eller forskyde noget enkeltobjekt i universet, da det, uanset hvor og i hvilken gruppe (fundamentalpartikel) det befandt sig, ville betyde et brud på homogeniteten. Man ville jo flytte den pågældende gruppes massemidtpunkt i forhold til de andres, hvilket i sidste instans kunne karakteriseres som en forskydning af universet som helhed, hvad der forudsætter absolut rum.

Den lokale uregelmæssighed er derfor i virkeligheden en kamoufleret homogenitet, for hvis noget forekommer os at være flyttet, må noget andet være flyttet i modsat retning på en sådan måde, at den globale fordeling ikke er ændret, dvs. således, at de to deles fælles massemidtpunkt er forblevet ubevægeligt (og deres samlede bevægelsesmængde altså er forblevet nul). Ønsker vi at bevæge dette, må vi på samme måde flytte noget tredje i modsat retning - og så fremdeles.

Men det vil sige, at et sammensat legemes massemidtpunkt kun ændrer bevægelse under indflydelse af ydre kræfter. Vi har således udledt massemidtpunktssætningen, og det ses, at den i sin essens siger, at universets samlede bevægelsesmængde er nul - hvad der vel dårligt nok kan overraske.



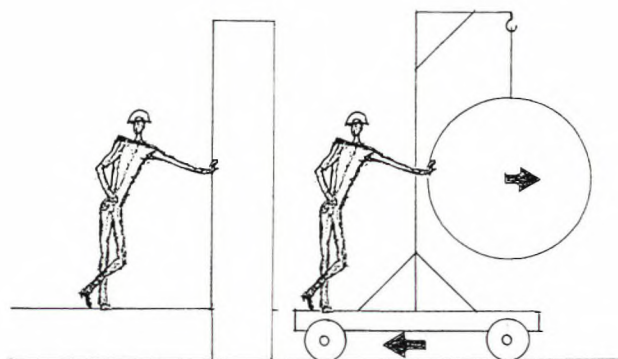
Figur 2. Aktion og reaktion: Newton satte et stykke jern og en magnet fast på et bræt og lagde dem på en vandflade. Ville skibet nu sejle i pilens retning fordi magneten trak i jernet? Da der intet skete sluttede han at indre kræfter ophæver hinanden. Det er kun de ydre kræfter der kan ændre et legemes bevægelse. Men han kunne ikke forklare hvorfor.

Ydermere må indre kræfter ophæve hinanden, da der ellers måtte være noget tilovers, der kunne virke som "ydre" kraft; dvs. aktion er lig med reaktion.

Vi deler nu et objekt i to med masserne m og M og flytter M . Dette kan kun gøres ved at flytte m i modsat retning - dvs. "kraften" til at flytte M får vi ved at støde fra på m , og der er altså tale om samme kraft på m og

M . Da det fælles massemidtpunkt ikke flyttes, vil de accelerationer, vi herved giver de to objekter, være omvendt proportionale med deres masser (nemlig efter definitionen af massemidtpunkt), og vi har altså udledt Newtons 2. lov; kraft = masse gange acceleration.

Inertimassen er altså dét, som er homogent fordelt, og inerti er et udtryk for homogeniteten - det vil igen sige for rummets ikke-absoluthed. Når man læner sig mod en mur, føler man en reaktion. Inerti er den reaktion, man føler, når man læner sig mod universet.



Figur 3. Når man læner sig mod en mur føler man en reaktion. Inerti er den reaktion man føler, når man læner sig mod universet.

Ifølge "Machs princip" (Ernst Mach 1838-1916) er det eneste, der betyder noget i mekanikken, stoffet, og lokale inertikræfter skyldes universets fjerne masser og overføres som en fjernvirkning af stof på stof. Men, som det her synes, er det ikke så meget stoffet som sådant, som dets fordeling, der betyder noget.

Ligesom man ikke kan flytte noget, kan man naturligvis heller ikke fjerne noget uden at bryde homogeniteten, og det er grundlaget for termodynamikkens første hovedsætning - loven om massens (energiens) konstans. Den nærbeslægtethed, der herved kommer til syne mellem denne og Newtons 2. lov i deres udspring, gør sig også gældende i deres videre konsekvenser: I sin egen skab af "mekanikkens årsagssætning" er Newtons 2. lov grundlaget for den mekaniske determinisme, og denne har naturligvis ingen relevans, medmindre man kan regne med, at universets indhold til enhver tid er forhånden.

Isotropi og gravitation.

Lad de fornævnte masser m og M efter flytningen have den indbyrdes afstand r . Set fra én af dem er det ellers isotrope univers nu - på grund af den andens tilstedeværelse - alt andet end isotropt, og de må derfor have tendens til igen at søge sammen i det nærmeste punkt, hvori det vil være det, dvs. i deres fælles massemidtpunkt, som for dem er universets midtpunkt, se figur 4.

Tendens til bevægelse er ensbetydende med acceleration. Dennes størrelse må være proportional med den forhåndenværende anisotropi, og spørgsmålet er så, hvor-



Læksøger på heliumbasis

Hvilke krav stilles der?

- ★ Hurtig
- ★ Nem og entydig betjening
- ★ Oliefri indsugning
- ★ Robust
- ★ Enkelt service
- ★ Prisbillig

Anvendelse:

- ★ Kvalitetskontrol
- ★ Forskning og udvikling
- ★ Analyseudstyr
- ★ Høj -og ultrahøjvakuum

Leybold ApS
Roskildevej 342A
2630 Tåstrup
Tlf.: 43996444
Fax: 43996544



dan denne måles.

Vi kender resultatet på forhånd, da det jo skal kunne fortolkes som gravitationsfeltet; så ved nu også at forsøge at ræsonnere os frem til det rigtige resultat kan vi få en førstehånds fornemmelse af, hvad universet rent kontant "mener" med anisotropi.



Figur 4. Universet søger at rette op på en lokal anisotropi ved at give partiklerne en tendens til at søge mod massemidtpunktet. Denne tendens er gravitationen.

Det synes da klart, at set fra den ene masse, m , må anisotropien være desto større, jo større den anden masse, M , er og desuden jo nærmere M er, dvs. jo større M synes at være. Denne tilsyneladende størrelse - dvs. den rumvinkel, som M ses under - er omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem masserne, r^2 . Vi får da som udtryk for anisotropien og dermed for accelerationen af m :

$$a = M/r^2,$$

som ifølge sagens natur er uafhængig af m , dvs. alle

legemer falder lige hurtigt. Kraften på m bliver da iflg. Newtons anden lov:

$$F = mM/r^2$$

bortset fra en adaptiv konstant; og vi har således udledt Newtons tyngdelov.

Gravitationsfeltet er altså et anisotropifelt, og tyngdemassen er - som inertimassen - dét, som er fordelt. De to masser er ikke identiske ved et lune af naturen. Der er kun én slags.

Så den Newtonske mekanik - selve prototypen på naturlove i absolut rum - viser sig altså at være et udtryk for ikke-absoluthed. Hvad nu selve grundlaget for alt dette - nemlig universets globale isotropi - angår, så medfører denne jo, at der ikke kan være nogen global gravitation, dvs. universet har ingen "selvgravitation", som kunne nedbremse dets ekspansion. Denne må derfor være en jævn, radiær bevægelse.

Indfører vi nu en parameter R som et udtryk for universets "størrelse" eller afstanden mellem to vilkårlige fundamentalpartikler, kan vi altså beskrive ekspansionen ved: $R = ct$, hvor c er en proportionalitetskonstant, og t er tiden.

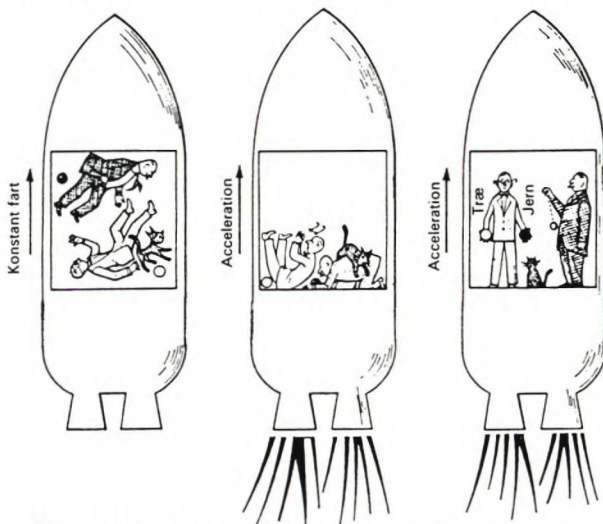
Fra Newton til Einstein

Efter i det foregående at have undersøgt den principielle

isotropis indflydelse på den Newtonske kosmologi skal vi se på dens virkninger i den kosmologi, der fremgår af Einsteins almene relativitetsteori. De tre hovedkomplekser er her Ækvivalensprincippet, Friedmanns ligning og den Schwarzschildske metrik omkring en centralmasse.

Ækvivalensprincippet

Således som inerti- og gravitationskræfter er udledt i det foregående, giver ækvivalensprincippet sig selv: Når inerti- og tyngdemasse er identiske, falder alle legemer lige hurtigt i et naturligt tyngdefelt (fordi tyngdekraften er proportional med massen og den fremkaldte faldacceleration omvendt proportional med den samme masse), og det er derfor ikke muligt at skelne mellem et sådant og det fiktive gravitationsfelt i et lukket accelereret system, hvori legemer jo simpelthen "falder" lige hurtigt, fordi de (set udefra) indhentes af systemet. Følgelig er det heller ikke muligt at konstatere nogen absolut bevægelse. Det ryk, vi føler, når elevatoren sætter sig igang opad, kunne lige så godt skyldes et pludseligt opstået gravitationsfelt.



Figur 5. Når raketten accelererer indhenter den sine vægtløse passagerer. De føler at alt falder ned med samme acceleration, nemlig raketten, og at de derfor lige så godt kunne stå på jorden.

Ækvivalensen mellem det fiktive og det naturlige gravitationsfelt er grundlaget for Einsteins almene relativitetsteori. Denne forudsætter de to massers identitet og ville ikke kunne fungere uden denne, men den er ikke nærmere forklaret.

Friedmanns ligninger

Løser man Einsteins feltligninger² med det almindelige kosmologiske princip som betingelse, fås, hvad man kunne kalde kosmologiens fundamentalligning, dvs. Friedmanns ligning - differentilligningen for det ekspanderende univers. Denne er den relativistiske parallel til "mekanikkens energisætning", som jo siger, at summen af en partikels kinetiske og potentielle energi er konstant. I Friedmanns ligning overtager universet så at sige partiklens rolle.

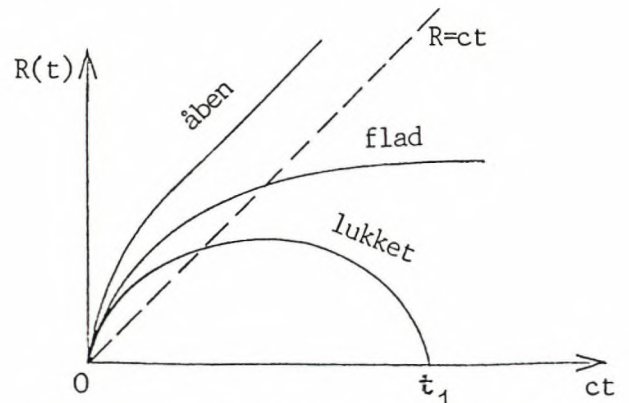
Betragtes fx en partikel i Jordens felt, har man i afstanden r :

$\frac{1}{2}mv^2 - GmM/r = \text{konstant}$ idet potentialet er negativt for tiltrækning. Her er G Newtons gravitationskonstant, M er jordmassen og m partiklens masse.

Betragtes i stedet et kugleformet udsnit af universet, som udvider sig isotropt sammen med dette og altså har konstant masseindhold, M , har vi tilsvarende i afstanden R fra centrum

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - GM = \text{konstant},$$

i det kuglens radius jo er proportional med den før omtalte "skalaparameter".



Figur 6. Kurverne i Friedmanns tre standardmodeller for rummets ekspansion viser universets "størrelse", $R(t)$ som funktion af tiden, t . Men når det indses at universets isotropi er principiel (et univers er isotropt), ændres Friedmanns ligning så dens eneste løsning bliver den punkterede rette linie. Det vil sige at ekspansionen er en jævn bevægelse.

Samme udtryk fås ved løsning af feltligningerne, idet konstanten nu viser sig at være $-\frac{1}{2}kc^2$, hvor c er lyshastigheden, og k er en indikator for rumkrumningens fortegn. Vi har altså Friedmanns ligning:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{2GM}{R} - kc^2,$$

hvis integration da giver R som funktion af tiden, dvs. formelen for rummets isotrope ekspansion. Nærmere betegnet fås Friedmanns tre standardmodeller for henholdsvis det "åbne", det "lukkede" og det "flade" univers, alt efter som k sættes lig med -1 , $+1$ eller 0 .

Isotropien er, som omtalt, indført "med hånden" som en betingelse ved løsning af feltligningerne. Gøres den nu principiel ved også at lade den omfatte selve feltligningerne², får det straks dynamiske konsekvenser, idet gravitationsleddet $2GM/R$ falder bort, og k antager værdien -1 . Tilbage har vi:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = c^2,$$

og altså som tidligere:

$$R = ct.$$

Den Schwarzschildske metrik omkring en centralmasse.

I et euklidisk rum har man for den infinitesimale afstand ds mellem to punkter iflg. Pythagoras:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Tænkes punkterne knyttet til en fysisk realitet, fx ved at være afsat på et fast legeme, kan man ved at flytte eller dreje koordinatsystemet ændre koordinaterne og dx , dy , og dz , men naturligvis ikke ds . Den er *invariant* overfor en koordinattransformation.

I et euklidisk firedimensionalt tid-rum haves tilsvarende for "afstanden mellem to punktbegebenheder:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Med lyshastigheden c som koefficient i tid-leddet får vi samme målestok for rum og tid. At vi har minustegn for de tre rumlige afstande sikrer blandt meget andet, at en partikel ikke samtidigt kan være på to forskellige steder, idet ds bliver imaginær for $dt = 0$.

Omkring en centralmasse er polære koordinater hensigtsmæssige:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Men da en masse deformerer rum og tid omkring sig, er forholdene ikke mere euklidiske, og der må derfor sættes koefficienter på, hvorefter den Schwarzschildske metrik bliver:

$$ds^2 = \alpha c^2 dt^2 - \frac{1}{\alpha} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$\text{hvor } \alpha = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

G er Newtons gravitationskonstant, og M er centralmassen.

Medens den Newtonske anisotropi som udledt i artiklen er M/r^2 , kan det da af udtrykket for den Schwarzschildske metrik udledes, at den Schwarzschildske ("deformerede") anisotropi bliver

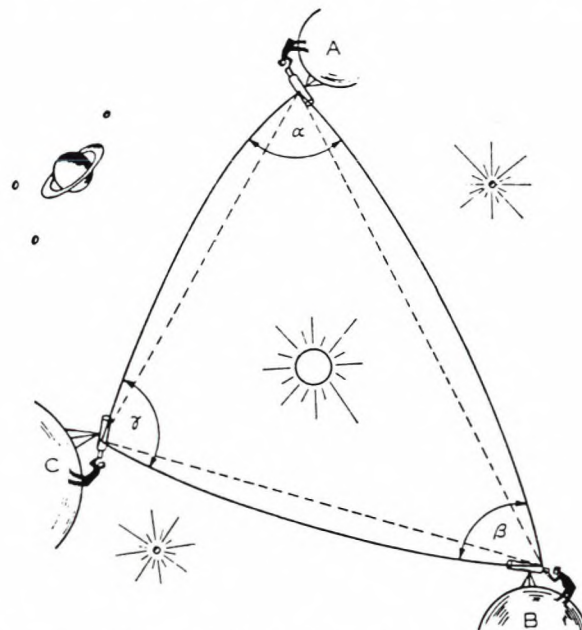
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{M}{r^2}$$

Ekspansionen er altså en jævn bevægelse, og da den principielt ikke kan ændres, repræsenterer den entydigt tiden, idet c i den forbindelse er et målestoksforhold mellem rum og tid. Vi ser nu, hvorfor universet ekspan-

derer: Tiden skal gå med noget. Er der ingen ekspansion, må den gå af sig selv og altså være absolut.

Den Schwarzschildske metrik

Den Schwarzschildske metrik for det tomme tid-rum omkring en centralmasse blev fundet af K.Schwarzschild i 1916 ved løsning af de såkaldte "vakuumligninger", der er en forenklet form for Einsteins feltligninger. De fås, som navnet antyder, ved at sætte udtrykket for universets masse-energiindhold i feltligningerne lig med nul. Men allerede herved er feltligningerne i deres konventionelle form inkonsistente, idet de altså tillader et universelt vakuum, dvs. en tom baggrund for universet, hvilket er i direkte modstrid med teoriens forudsætninger, hvorefter tid-rummet ikke har selvstændig eksistens uafhængigt af sit indhold¹. Men hertil kommer så, at selve de fremkomne vakuumligninger ved at resultere i en metrik omkring en centralmasse, uden at deres anvendelse ved nogen restriktion er begrænset til at være lokal, tillader et univers bestående af ét eneste centrallegeme, og så er rummet igen absolut. Vi må jo nemlig forestille os dette centrallegeme som anbragt i rummets midtpunkt.



Figur 7. Solen deformerer tid-rummet omkring sig, så lysstråler bøjes. De tre iagttagere der prøver at eftervise Euklids geometri for en trekant omkring solen, vil måle en vinkelsum der er for stor.

At man på dette grundlag har kunnet opstille den (korrekte) Schwarzschildske metrik skyldes et sammentræf af heldige omstændigheder. Ved den ovenfor nævnte operation, som samtidigt gør feltligningerne isotrope og konsistente, bliver de - skønt de ikke længere indeholder noget universelt vakuum - i en alternativ form formelt identiske med vakuumligningerne. Og det er altså dem, Schwarzschild, sig selv uafvidende, har løst.

Vi befinder os nu i en interessant situation. De reviderede feltligninger er udtryk for et principielt isotropt og

dermed globalt gravitationsfrit univers. Men ved deres løsning kan vi finde det Schwarzschildske gravitationsfelt. Det kan jo kun betyde, at universet består af isotropt fordelte symmetribrud (centralfelter), det vil sige at det

principielt er galaktisk. Denne struktur er altså ikke et termodynamisk fænomen, men en matematisk restriktion. Den repræsenterer rummets og tidens ikke-absoluthed.

Referencer:

- 1) Albert Einstein: *Relativity. The Special and the General Theory*. 15. ed. Methuen, London. 1954. (Side vi. appendix V, side 135-157).
- 2) Kay Akselbo: *Nogle problemer i tid og rum*. KVANT, november 1992.



Kay Akselbo er civilingeniør og arbejder med videnskabsfilosofiske problemer i fysik og kosmologi.



Fine tune your Zs Z axis translators from Vacuum Generators

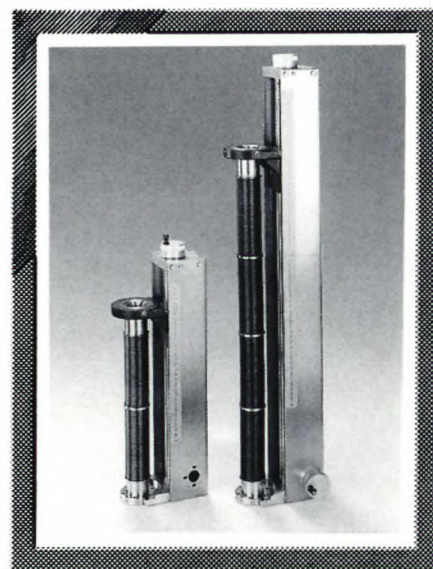
A wide range of **low cost** precision Z only translators for UHV research. Designed for movement over long distances, the ZAXIS series includes translators for 150, 300 and 600 mm travel.

Various applications include:

- sample entry/introduction system
- sample movement
- automated sample transfer (if motorised)
- coarse Z only analysis with primary and secondary rotation
- Z only heat/cool stage

Z movement is accomplished using a screw drive, and options are available to suite specific application needs

For further information, please contact Kennet Joelsson,
Fisons Instruments Nordic AB, .tel.++46-8-629 24 00, fax.++46-8-627 52 20,
e-mail: kennet.joelsson@fisons-instruments.se
Internet Home Page: <http://www.fisonssurf.co.uk/vacgen>



Meddelelser fra Dansk Fysisk Selskab

Preben Alstrøm, formand for DFS.

Under Dansk Fysisk selskabs årsmøde på Nyborg Strand Hotel, 23-24 maj 1996, blev der afholdt generalforsamling. Formandens beretning (forkortet) samt regnskabet følger her.

Formandens beretning

Der har været afholdt valg til bestyrelsen og sektionerne i DFS. Deadline for forslag til kandidater var den 5. februar. Den nye bestyrelse er konstitueret. Udtrådt af hovedbestyrelsen er Jakob Bohr, Torsten Freltoft Dan Birkedal, og Jens Juul Rasmussen. Indtrådt er Karsten Wedel Jacobsen (næstformand), Ole Mouritsen, Peter Bodin, samt Jens-Olaf Pepke Pedersen, der har overtaget formandsposten i atomfysiksektionen efter Jens Juul Rasmussen.

Halvdelen af hovedbestyrelsen er således udskiftet, og jeg vil godt benytte lejligheden til at takke de fire afdgående medlemmer for det udførte arbejde i DFS regie, som bl.a. betyder at vi overtager en sund økonomi, med mulighed for mange nye aktiviteter.

Bestyrelsesmedlemmernes adresse m.m. vil sammen med anden information være at finde på DFS' hjemmeside, <http://www.nbi.dk/dfs>.

Af aktiviteter i det forgangne år skal nævnes at der for syvende gang med stor succes blev afholdt sorø dage på Sorø Akademi. 23 gymnasieelever fra 2.g deltog i kurset, der lå i sidste uge af juli sidste år. Allan Horstrup, Trine Dahl-Jensen og Klaus Mosegaard m.fl. sørgede for en uforglemmelig oplevelse. Sorø dage afholdes igen i år. Udover Allan Hornstrup fra Rumforskningsinstituttet deltager Britt Larsen fra NKT i år som koordinator.

En anden begivenhed var vinterskolen i Sandbjerg, der med fuldt hus af PhD studerende (tilmeldt via internettet) var en stor succes, med bl.a. Risø's nye forskningsprofessor Kell Mortensen som en af talerne.

Af aktiviteter for fysikstuderende, har Dansk Fysisk Selskab været involveret i en International Conference for Fysikstuderende afholdt i København i august sidste år. Ca. 120 deltagere fra 21 lande var samlet på H. C. Ørsted Institutet. Et stort og dygtigt studenterorganiseret arrangement, der fortjener megen ros, bl.a. fordi det tillod mange studerende fra østeuropæiske lande at deltage på lige fod med vesteuropæiske studenter.

Derudover har DFS netop ydet støtte til et mere

begrænset studenterarrangeret sommerkursus i 'Physics and Electronics at Cryogenic Temperatures' i juli på DTU.

Mange andre arrangementer har været afholdt, og det vil tilstræbes, at information herom oftere fremover vil være at finde på DFS' hjemmeside.

I forbindelse med en ny national forskningsstrategi afholdt DFS i december et debatmøde om Forskning og Industri. Et panel af ni inviterede forskningsledere dannede rammen om en spændende debat. Et referat af dette møde kan findes på DFS' hjemmeside. Et af punkterne som Forskningsdirektør Ove Poulsen fremhævede var et politisk ønske om en større direkte interaktion mellem den offentlige forskning og det private erhvervsliv. Til dette anvistes bl.a. de nye centerkontrakter, hvis formål er at hjælpe igangsætningen af en stærk vekselvirkning. Der var mange forslag og ideer, og jeg anbefaler, at man læser referatet.

Endvidere har DFS via Academia Europaea medvirket til uddeling af fysikpriser til unge forskere i det tidligere Sovjetunionen. Vores bidrag er 1000 pund. Uddelingsinformationen fra Academia Europaea's Newsletter er gengivet i KVANT 4, 1995.

I forbindelse med de baltiske lande, er en Nordisk-Baltisk kontaktgruppe dannet, koordineret af Paul Høyer på Nordita. Via Eivind Osnes, der sidder i EPS' executive Committee, har kontaktgruppen en nær forbindelse til EPS. Det er besluttet at fortsætte møderne i kontaktgruppen hvert år med skiftende chairman, næste gang i marts 1997. Det er vedtaget for i år, at Norge og Danmark sponsorerer Letland og Lithauens medlemsskab i EPS (omkostning ca. 3700 kr.), mens Sverige og Finland sponsorerer Estland.

Vedrørende EPS, flytter de hovedkontor fra Geneve i Schweiz til Mulhouse i Frankrig (sekretariatet for Euro-Physics Letters bliver i Geneve). Der er kommet en ny President-Elect, som DFS havde været medstiller af, nemlig Prof. Denis Weaire fra Trinity College i Dublin.

Muligheden for at spille en større rolle i EPS fremover skal også fremhæves, idet man nu kan indmelde medlemmer af DFS i EPS' divisioner.

EPS og DFS har i det forgangne år mistet et organisatorisk talent, Allan Mackintosh. (Ordet blev her givet til Peter Sigmund, der var elskværdig at sige nogle mindeord).

DANSK FYSISK SELSKAB
Årsregnskab 1995

INDTÆGTER

DFS og EPS kontingenter		157.275,00
Renter bankkonto		3.778,09
Renter girokonto		1.942,03
INDTÆGTER IALT		162.995,12

UDGIFTER

DFS administration:		
Medhjælp	10.110,00	
Gebyrer, papir m.v.	3.862,77	
Repræsentation	<u>646,00</u>	14.618,77
EPS:		
EPS indv. medlemskab 1995	16.481,96	
EPS DFS-medlemskab 1995	30.866,61	
Europhysics News distribution	<u>11.357,00</u>	58.705,57
KVANT:		
KVANT 1995 (719 x 75kr)		53.620,00
DFS Årsmøde:		
Mødeindtægter	340.985,00	
Mødeudgifter	<u>319.809,45</u>	
Mødeoverskud	21.175,55	
Overskud overf. fra 1994	77.495,99	
Overskud ialt overf. til 1996	<u>98.671,54</u>	0,00
USS Karresbækminde:		
Mødeindtægter	23.550,10	
Mødeudgifter	<u>21.224,00</u>	
Mødeoverskud	2.326,10	
Bestyrelsesmøder	291,00	
Mødeoverskud overf. til 1996	<u>2.035,10</u>	0,00
DFS Debatmøde:		
Mødeudgifter		2.598,75
Netværk for kvinder:		
Mødeudgifter		2.564,50
Sorødagene:		
Tilskud		1.684,00
Østeuropa:		
Academia Europaea		8.733,50
Rejser for unge fysikere:		
Physica Scripta legat 1995	8.202,00	
Overført fra 1994	12.097,00	
Overskud ialt overf. til 1996	<u>20.299,00</u>	0,00
UDGIFTER IALT		142.525,09
OVERSKUD		20.470,03
		162.995,12

DANSK FYSISK SELSKAB
STATUS 31.12. 1995

AKTIVER

Indestående bank	137.564,43
Indestående giro	236.670,87
Kassebeholdning	3,50
Udestående DFS-kontingenter (indb. i 96)	400,00
Tilgodehavende vedr. Karresbækminde (indb. i 96)	2.900,00
AKTIVER IALT	377.538,80

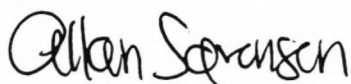
PASSIVER

Skyldig distribution Europhysics News (bet. i 96)	11.357,00
Skyldige mødeudgifter DFS Debatmøde (bet. i 96)	2.598,75
Skyldige repræsentationsudgifter (bet. i 96)	315,00
Årsmøde overskud overført til 1996	98.671,54
USS Karresbækminde overskud overført til 1996	2.035,10
Physica Scripta rejsetilskud overført til 1996	20.299,00
Fysisk Tidsskrift mellemregning	4.922,40
KVANT mellemregning (bet. i 96)	13.925,00
PASSIVER IALT	154.123,79

KAPITALKONTO

Saldo pr. 1. januar 1995	202.944,98
Overskud 1995	20.470,03
KAPITALKONTO IALT	223.415,01
SUM=AKTIVER	377.538,80

7. maj 1996



Allan H. Sørensen
Kasserer

DFS' årsregnskab for 1995 er revideret.
Ingen kritiske bemærkninger.
19. maj 1996



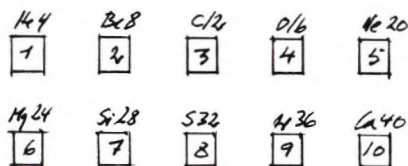
Poul K. Michelsen
Revisor for DFS

Isotoper i et puslespil.

Søren Rasmussen

Denne model for isotoper tager sit udgangspunkt i en elementopdeling af atomkernerne.

Atomere kan i deres kerne indeholde α -partikler, og det tyder på at særlige stabile isotoper, med en enkelt undtagelse, består af rene (He-4) kerner. Disse vil jeg tegne som i figur 1.

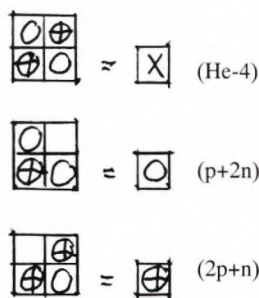


Figur 1. De særlig stabile isotoper kan opdeles i rene He-4 elementer.

Følger man dette spor kan man udvide det til, at alle atomkerner kan være opbygget af elementer, ikke kun (He-4), men også af $(p+2n)$ og $(2p+n)$ elementer. De er byggestenene i alle grundstoffer i det periodiske system. Disse 3 elementer var måske tilstede i det meget tidlige univers.

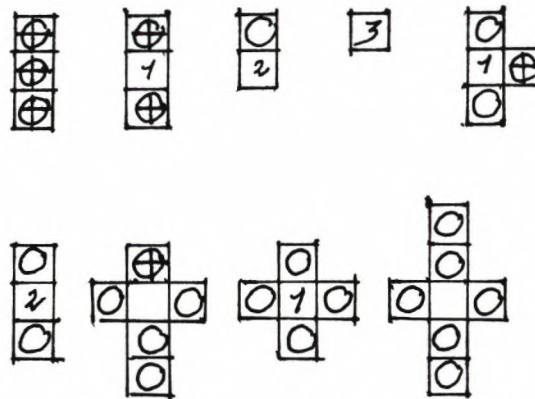
Dette system bestående af kerner udelukkende opbygget af disse elementer, giver et billede af kernes stabilitet og en forklaring på hvorledes ustabile isotoper henfalder med α - β - og γ -stråling for at opnå større stabilitet. Ustabile kerner har deres energi akkumuleret i et øget elementantal og ved henfald afbalancerer elementerne energitilstanden i den enkle kerne.

Man kan opdele kernerne, i næsten alle isotoper, i de 3 omtalte elementer, der i modellen ser således ud:



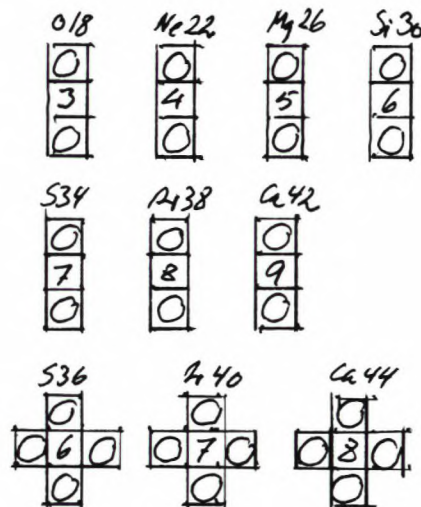
Figur 2. De grundlæggende byggestene i denne artikels opdeling af isotoperne. Antallet af He-4 elementer i en isotop angives med et tal i det lille kvadrat. Tritium og He-3 elementerne gentages i det antal der indgår i en opdeling.

Som eksempel kan man bruge kulstofisotoperne. Tegner man alle isotoperne i dette grundstof, ser man hvorledes modellen gør rede for deres konstruktion. Tilsyneladende vil isotoper, der består af enten flere, eller færre elementer, end der kan dannes inden for modellens rammer, ikke kunne eksistere. Fig. 3.



Figur 3. Opdelingen af kulstofisotoperne fra C-9 til C-18 i de foreslåede elementer.

Ved brug af modellen kan man opstille rækker af særligt stabile isotoper, begyndende med isotoper der består af rene (He-4) elementer, som nævnt ovenfor. Fortsættelsen kan være isotoper med et center af (He-4) elementer og et lige antal $(p+2n)$ elementer. Som det er vist i figur 4.



Figur 4. Nogle isotoper fra Be-10 og C-14 til Ca-44, der er opbygget med et lige antal $(p+2n)$ elementer.

Grundstoffer med et ulige antal af $(p+2n)$ elementer har som regel kun en stabil isotop for hvert grundstof. Enkelte gange kan der være 2 stabile isotoper, når der skiftes struktur, f.eks. når antallet øges fra 1 $(p+2n)$ til 3.

Man kan af disse rækker se, at stabile isotoper består af enten (He-4) elementer, eller elementer af (He-4) og et antal af $(p+2n)$, det er sjældent $(2p+n)$ er element i sådan stabile isotoper.

De ustabile isotoper har altid mindst et $(2p+n)$ elementet, når der er et overskud af neutroner og et $(2n+p)$



VAT Vakuumentile AG

Førende på verdensplan indenfor vakuumventiler



Ventiler, reguleringssystemer og bælge til høj- og ultrahøjvakuum

Størrelser fra DN 16 til DN 400
Certificeret ISO 9001

Repræsenteret af:

Balzers-Pfeiffer Scandinavia, tlf 39 68 32 61
Baunegårdsvej 7L, 2820 Gentofte

når der er et underskud af neutroner, der deltager aktivt i processen når isotopen henfalder. Det vil sige restruktureres og udsender γ -stråling.

En ustabil kerne indeholder altid flere elementer end en stabil, idet kernen har sin energi bundet i et øget antal elementer. Den ustabile kerne fungerer i denne model ved at $(p+2n) + 3(2p+n)$ eller $(2p+n) + 3(p+2n)$ elementer afhængig af hvilken isotop det drejer sig om, efter henfald bliver til $3(\text{He-4})$, således at energien er bevaret i et større antal elementer i den ustabile kerne og færre i den stabile.

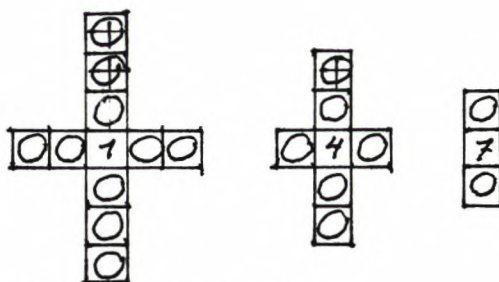
Et eksempel hvor man ser dette fungere ved hjælp af modellen, kunne være den ustabile Si-34 isotop. Si-34 er kun valgt for at eksemplificere modellen. Denne isotop består af flere elementer, end en tænkt stabil Si-34 isotop ville være sammensat af, men en sådan tænkt stabil isotop kan ikke skabes inden for denne models rammer.

Ved henfald med β^- og γ -stråling medvirker et helt $(2p+n)$ element, nemlig det element hvorfra β^- strålingen udgår. Efter udstrålingen deltager elementets tre positive nukleoner i den følgende proces, hvor de binder sig til hver sit $(p+2n)$ element, for at danne tre α -partikler.

Si-34 kernen går fra at være en 11 elements kerne til et 10 elements P-34 isotop under udsendelse af γ -stråling, idet isotopen skifter struktur.

I løbet af 12,4 s. gentages forløbet endnu engang med

halvdelen af de P-34 isotoper der måtte være tilstede. Efter β^- henfaldet går de tre fri protoner igen til hvert sit $(p+2n)$ element og under udsendelse af γ -stråling forvandles den ustabile 10 elements P-34 isotop, til en stabil S-34 isotop bestående af 9 elementer.

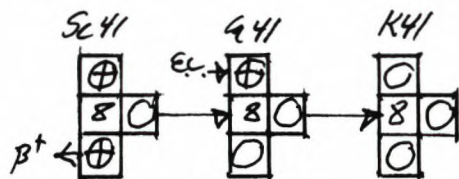


Figur 5. Henfaldskæden for Si-34.

Eksemplet viser hvorledes dele af kernens energi er bundet i elementantallet. Ustabile isotoper har deres energi bundet i et større antal elementer, jo flere elementer, desto større energi. Når kernen henfalder under udsendelse af γ -stråling går den ned i elementantal for at

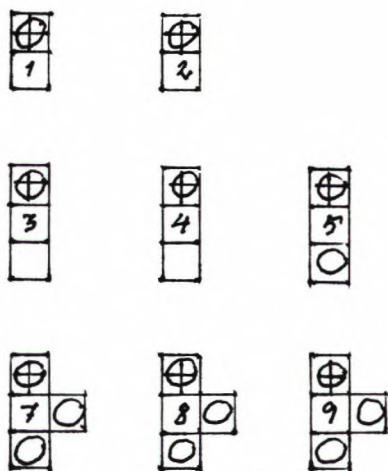
opnå større stabilitet. Den akkumulerede energi frigøres som γ -stråling. Isotopen søger imod det mindst mulige antal elementer for at opnå den størst mulige stabilitet.

Når der ikke udsendes γ -stråling ved processer med β^- , β^+ eller E.C. går isotopen ikke ned i elementantal, det kan ske ved at enten p eller n afhængig af hvilken isotop det drejer sig om skifter ladning, uden at der opnås 3 ens ladede elementarpartikler i det samme element, som f.eks. ved henfaldet Sc-41, Ca-41, K-41.



Figur 6. Henfaldskæden for Sc-41.

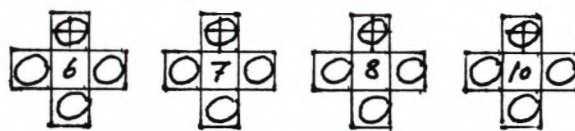
Når man betragter Ca-41 nærmere ser man, at den tilhører en gruppe af elektronindfangne kerner.



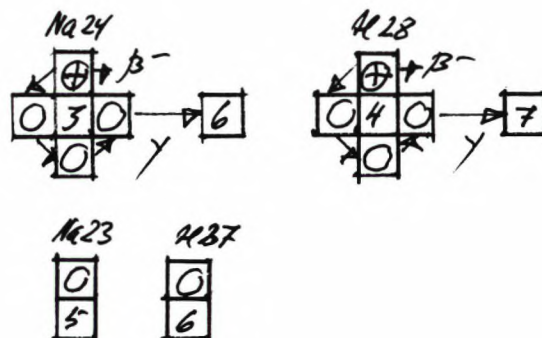
Figur 7. Isotoper der henfalder ved elektronindfangning. Be-7, C-12, F-18, Na-22, Al-22, Ar-37, Ca-41 og Ti-45.

Denne række af elektronindfangne kerner, der af modellen er ordnet i rækkefølge, viser hvorledes modellen visualiserer kerneopbygningen. Man kan med modellen se strukturen af en af de mange fremtrædelsesformer atomkernerne lader sig se i og man kunne gætte på at næste række i denne serie ville bestå af 4 elementer, $(2p+n) + 3(p+2n)$ omkring α -elementerne. En kontrol bekræfter dette.

Modellen ordner atomkernerne på tværs af det periodiske system, således at f.eks. Na-24 kernen, mere ligner Al-28 kernen, både i konstruktion og i sin måde at reagere på, end den ligner sin nærmeste slægtning Na-23 kernen, der til gengæld ligner Al-27 kernen, som det ses i figur 9. De er begge stabile.

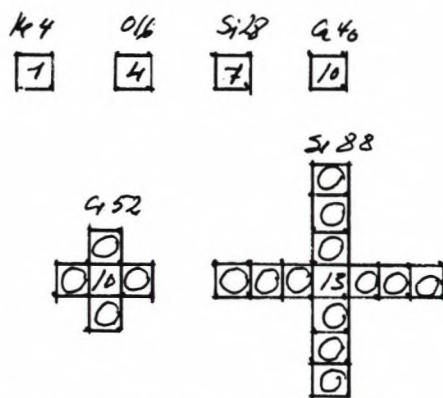


Figur 8. Flere elektronindfangende kerner: Cl-36, K-40, Sc-44 og Mn-52.



Figur 9.

Benytter man modellen på de magiske tal, og udtegner dem på den måde modellen dikterer, nemlig som bestanddele af ganske bestemte elementantal, som i denne model er skallerne med de magiske tal 2, 8, 14, 20, 28, 50, ... , (14 er et magisk tal i denne model) ser rækken af de mest ideelle isotoper således ud som i figur 10.



Figur 10. Kerner med magiske neutrontal ordnet efter elementsystemet.

Modellen viser de magiske tal i deres enkleste form som en række af He-4 kerner med et interval på tre α -partikler imellem hver af disse ideelle konstruktioner, med en tilføjelse af et antal $(p+2n)$ elementer ved opbygningen af magiske isotoper efter Ca-40.

Intervalleret på 3 (He-4) imellem det magiske elementantal, kan forklares ved, at netop det er det mindste antal α -elementer, der kan brydes op og give $2(p+2n) + 2(2p+n)$, der er to, af de tre basale elementer i modellen. Modellen giver en forestilling om forbindelsen imellem de magiske tal og atomkernernes opbygning i skaller.

Isotoperne He-4, O-16, Si-28, Ca-40, Cr-52, Sr-88, ... er kernepunkter i det system der skaber de stabile skaller i det periodiske system.

Denne konstruktion er den enkleste form, de magiske tal kan angives i, idet de har de flest mulige protoner og neutroner i de færrest mulige elementer.

Modellen skal ses under den synsvinkel at elementarpartiklerne forener sig i elementer i atomkernerne og således danner, dels det system som alle kerner er opbygget af og dels de elementer som afbalancerer kernens energi. Kombinationer og fordelingen af disse elementer afspejler den energitilstand der hersker i atomkernerne. Modellen er et billede på den balance atomerne søger imod for at opnå den størst mulige stabilitet.



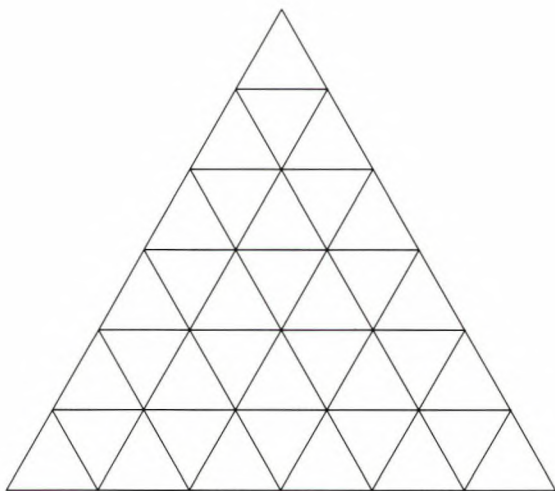
Søren Rasmussen, er uddannet som billedhugger på Kunstakademiet i København. Han arbejder som skulpturkonservator ved Thorvaldsens Museum og Roskilde Domkirke.

Den evige trekant – eller kunsten at tælle

Mogens Esrom Larsen, Københavns universitets matematiske institut

Indledning

Når man har bygget et korthus, melder det helt naturlige spørgsmål sig nærmest af sig selv, "hvor mange trekanter er der i korthuset?"



Figur 1

Når familien har talt trekanterne i dette seksetagers korthus kommer det næste problem: Hvem har talt rigtigt, hvis nogen overhovedet har det? (Der er 78, så i praksis kan enkelte være smuttet.) Det er faktisk nemmere at svare på det generelle spørgsmål, "hvor mange trekanter er der i et

trekantet korthus på n etager?"

Men hvordan skal opgaven gribes an? Man kan tælle trekanter af samme størrelse, trekanter, der er retvendte og trekanter, der står på spidsen. Man kan forsøge sig med en rekursionsformel, og man kan prøve med en snedig korrespondance til en kendt mængde. Hver eneste tænkelig metode har faktisk været forsøgt med held i løbet af de sidste 30 år, så en gennemgang af problemets historie giver samtidig en oversigt over den kombinatoriske tælle teknik.

Løsning

Den simpleste form, løsningen kan gives, er som den hele del af brøken:

$$\left[\frac{n(n+2)(2n+1)}{8} \right] \quad (1)$$

hvor n er antallet af etager i korthuset, og de kantede parenteser, $[x]$, betyder det nærmeste hele tal, $n \leq x$. (Det er kun for ulige værdier af n , at afrundingen er nødvendig.) Det ses, at for $n = 6$ fås $\frac{6 \cdot 8 \cdot 13}{8} = 78$.

Historie

De ældste kendte korthuse optræder hos A. Cyril Pearson i 1907, [14], og som "King Solomon's Seal" hos Sam Loyd i 1914, [10], der spørger om antallet af ligesidede trekanter i et korthus på 4 etager. (Der er 27.) Der er iøvrigt kun ligesidede trekanter.

Den første, der stiller spørgsmålet i den generelle form, er J. Halsall, der i 1962 i [7] finder formelen, men ikke beviser den. Denne notits forblev temmelig upåagtet på grund af sin intetsigende titel, "An interesting series". Den refereres kun af N. J. A. Sloane i [16], (1973). Opgaven stilles igen i 1966 af J. E. Brider, [1], hvor formelen gives, men heller ikke denne gang bliver den bevist. Det første bevis skyldes C. L. Hamberg og T. M. Green, [8], i 1967, og denne gang blev der lagt mærke til det. Men ikke af alle. Uden at kende disse publikationer stillede og løste F. Gerrish opgaven i 1970, [6], men løsningen var kompliceret, så den gav anledning til flere simplifikationer fra D. G. Mastrantione, [12], B. W. Martin, [11], og C. Wells, [17], alle i 1971. Endelig i 1973 gav J. W. Moon og N. J. Pullman i [13] et elegant bevis med brug af frembringende rækker.

Trods alle disse artikler stillede R. E. Edwards spørgsmålet i Mathematics Magazine i 1974, [4]. Dette blev besvaret af B. Prielipp og N. J. Kuenzi i [15] samme år med henvisningerne [6, 11, 12, 13], mens mange andre henviste til [8]. Samtidig gav L. Carlitz og R. Scoville et nyt bevis i [2]. Senere, i 1976, gav R. J. Cormier og R. B. Eggleton i [3] endnu et bevis med henvisning til Edwards' spørgsmål i [4].

Nu var problem og løsning kendt, men gik i glemmebogen. I 1986 stillede og løste R. H. Garstang opgaven i [5] uden henvisninger til litteraturen, endda i Mathematical Gazette, som tidligere havde bragt [6, 7, 11, 12]. Endelig blev alle beviserne samlet i 1989 i [9], hvor et enkelt bevis blev tilføjet.

Den generelle opgave er stillet mindst 6 gange uafhængigt af hinanden, nemlig i 1962 i [7], 1966 i [1], 1967 i [8], 1970 i [6], 1974 i [4] og i 1986 i [5].

Beviserne

Beviserne benytter de fleste af de metoder, man finder i en lærebog i kombinatorisk tælle teknik. Differensskemaer, del op og tæl, korrespondancer, differensligninger med og uden frembringende funktioner, rekursion og induktion og til sidst: Den relevante reference.

I det følgende vil jeg gennemgå samtlige beviser så detaljeret, at det skal være muligt for læseren at forstå dem uden at skulle søge til anden litteratur. Meningen med det er, at man kan bruge opgaven som eksempel: Man stiller den til en klasse og er så forberedt på at hjælpe eleverne på glet, ligegyldigt hvilken idé, de begynder med. (Med mindre en elev finder endnu en måde at angribe problemet på, hvad der ville være det mest spændende, man kunne få ud af opgaven!)

Differensskemaer

Denne metode er benyttet i [1, 7, 8, 11, 15] til at bestemme formelen (1). Hvis nemlig løsningen er et polynomium, så vil det afsløres ved, at den n -te differens er 0. Vi danner derfor håbefuldt et differensskema, så langt som nødvendigt. Vi kalder antallet af trekanter i et korthus med n etager for $f(n)$, og tæller disse for $n = 1, 2, 3, \dots$

Vi danner derefter successivt differenserne $\Delta^1(n.5) = f(n+1) - f(n)$, $\Delta^2(n) = \Delta^1(n.5) - \Delta^1((n-1).5)$, osv. Vi får følgende tabel:

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	5	13	27	48	78	118
Δ^1		4	8	14	21	30	40
Δ^2			4	6	7	9	10
Δ^3				2	1	2	1

Det ses umiddelbart, at vi ikke kan nå en konstant differensrække. Funktionen er ikke noget polynomium. Men da Δ^3 har periode 2, kan det måske hjælpe at dele problemet op i de lige og de ulige.

De ulige etageantal giver

m	0	1	2	3	4	5
$n = 2m + 1$	1	3	5	7	9	11
$f(n)$	1	13	48	118	235	411
Δ^1		12	35	70	117	176
Δ^2			23	35	47	59
Δ^3				12	12	12

Og de lige giver

m	1	2	3	4	5	6
$n = 2m$	2	4	6	8	10	12
$f(n)$	5	27	78	170	315	525
Δ^1		22	51	92	145	210
Δ^2			29	41	53	65
Δ^3				12	12	12

Hvert af disse mønstre ender med en konstant trediedifferens. Vi kan derfor finde to trediegradspolynomier i n , der frembringer $f(n)$, i hvert fald så langt vi har orket at beregne $f(n)$. Den ene funktion må antage formen

$$f(2m+1) = am^3 + bm^2 + cm + d \quad (2)$$

Samtidig ved vi, at den antager værdierne 1, 13, 48, 118 for $m = 0, 1, 2, 3$.

Vi skal derfor blot løse ligningerne

$$\begin{aligned} d &= 1 \\ a + b + c + d &= 13 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 48 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 118 \end{aligned}$$

Det er en simpel rutine at finde $(a, b, c, d) = (2, \frac{11}{2}, \frac{9}{2}, 1)$. Vi gætter derfor på formelen for ulige værdier af n :

$$f(2m+1) = \frac{1}{2}(4m^3 + 11m^2 + 9m + 2). \quad (3)$$

Denne form findes i [1, 7].

Man kan naturligvis også finde polynomiet ved en interpolation. Bruger vi Lagranges interpolationsformel for n lige, får vi direkte:

$$\begin{aligned} f(2m) &= 5 \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &\quad + 27 \frac{(m-1)(m-3)(m-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &\quad + 78 \frac{(m-1)(m-2)(m-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &\quad + 170 \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= \frac{1}{2}(4m^3 + 5m^2 + m). \end{aligned} \quad (4)$$

Denne form findes også i [1, 7].

For at bringe disse to formler, (3) og (4), på en fælles form, indsætter vi $n = 2m + 1$ i (3) og $n = 2m$ i (4). Vi får så formlerne, også i [1, 7]:

$$f(n) = \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n - 1}{8} \text{ for } n \text{ ulige,} \quad (5)$$

$$f(n) = \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n}{8} \quad \text{for } n \text{ lige.} \quad (6)$$

Kun tælleren i (6) kan faktoriseres. Men tælleren i (5) kan jo faktoriseres, når vi ser væk fra konstanten, -1 . Vi indfører derfor paritetsfunktionen $\delta(n)$, defineret ved

$$\delta(n) = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ 1 & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \quad (7)$$

så vi kan sammenfatte (5) og (6) til

$$f(n) = \frac{n(n+2)(2n+1) - \delta(n)}{8}, \quad (8)$$

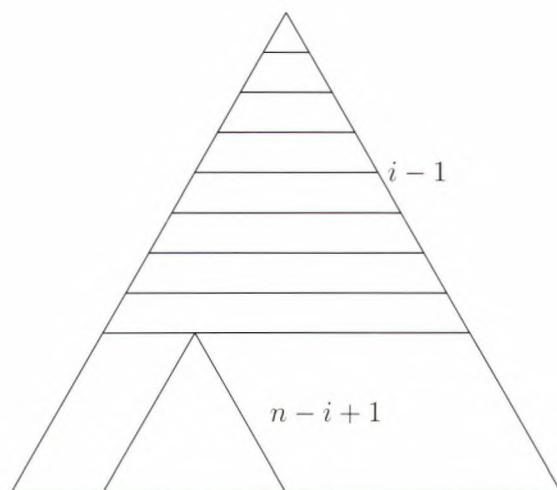
som naturligvis er ækvivalent med (1).

Del og tæl

Den nærliggende idé at tælle de retvendte trekanter for sig og trekanterne på spidsen for sig er ret udbredt. Lad os betegne de to funktioner med henholdsvis $\triangle(n)$ og $\nabla(n)$. Så har vi

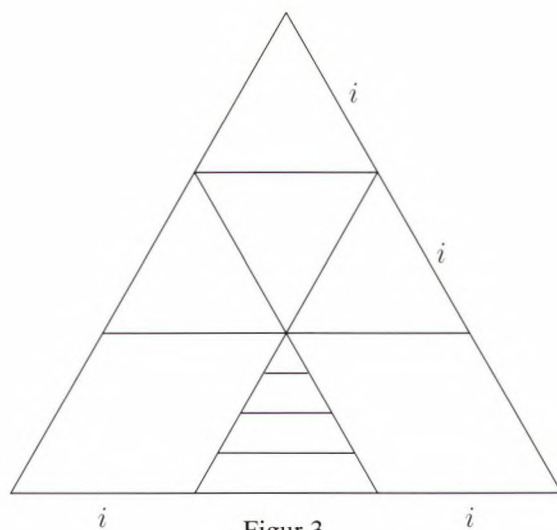
$$f(n) = \Delta(n) + \nabla(n). \quad (9)$$

Yderligere opdeling foretages i [5, 6, 8, og 15]. Mens [6, 8] deler så meget op, at den endelige optælling bliver besværlig, er [5, 15] tilfreds med den naturlige opdeling efter størrelse.



Figur 2

Toppunktet af en $\triangle$ -trekant af størrelse $n-i+1$ må ligge i den skraverede del af trekanten i figur 2. Derfor er antallet af trekanter af denne størrelse lig med antallet af punkter i den skraverede trekant, altså $1 + 2 + \dots + i = \frac{i(i+1)}{2}$.



Figur 3

Bruger vi Eulers sumsymbol,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (10)$$

kan vi skrive resultatet som:

$$\begin{aligned}\Delta(n) &= \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \binom{n+2}{3} \quad (11)\end{aligned}$$

hvor vi har betegnet binomialkoefficienten med

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (12)$$

Tilsvarende må spidserne af ∇ -trekanterne af størrelse i ligge i det skraverede område af figur 3. Derfor bliver antallet af ∇ -trekanter af størrelse i lig med antallet af punkter i den skraverede trekant, altså $1+2+\dots+(n+1-2i) = \frac{(n+1-2i)(n+2-2i)}{2}$. Altså er deres samlede antal

$$\begin{aligned}\nabla(n) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n+1-2i)(n+2-2i)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (2n+1) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i(i-1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &\quad - \frac{2n+1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \\ &\quad + \frac{2}{3} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\frac{2}{3} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) - \frac{2n+1}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

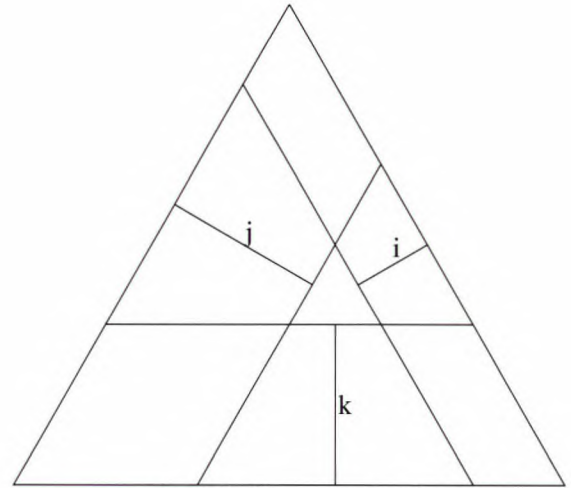
Dette udtryk kan forenkles ved hjælp af funktionen $\delta(n)$ defineret i (7), idet vi bruger formlen $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-\delta(n)}{2}$. Vi får så

$$\begin{aligned}\nabla(n) &= \frac{n-\delta(n)}{2} \cdot \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+2-\delta(n)}{2} \left(\frac{n-2-\delta(n)}{3} - \frac{2n+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{n-\delta(n)}{2} \cdot \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+2)(4n+7) - (2n+5)\delta(n)}{12} \right) \\ &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} - \frac{\delta(n)}{8},\end{aligned}\tag{13}$$

hvor vi har brugt den simple kendsgerning, at $\delta(n)^2 = \delta(n)$. Formlen (8) følger nu ved addition af (11) og (13) i henhold til (9).

Korrespondance

Dette princip benyttes i [3] på følgende måde. Hver trekant er karakteriseret af tre "koordinater," et tripel af hele tal, i, j, k med $0 \leq i, j, k \leq n$ hvor i, j, k er "højderne" af de tre sider. Se figur 4.



Figur 4

Hvert tripel definerer en trekant, med mindre denne udarter til et punkt. Det er tilfældet, netop når $i + j + k = n$. Men for at trekanten skal befinde sig inden i korthuset, T_n , skal

$$i + j \leq n, \tag{14}$$

$$i + k \leq n, \tag{15}$$

$$j + k \leq n; \tag{16}$$

derfor svarer mængden af trekanter til mængden af tripler,

$$\mathbf{A} = \{(i, j, k) \mid i + j \leq n \wedge j + k \leq n \wedge k + i \leq n \wedge i + j + k \neq n\}$$

Et tripel fra $\mathbf{A}$ svarer til en $\triangle$ -trekant, netop når $i + j + k < n$. Så for at finde $\triangle(n)$ skal vi tælle

$$\mathbf{B} = \{(i, j, k) \in \mathbf{A} \mid i + j + k < n\},$$

og for at finde $\nabla(n)$ skal vi tælle resten,

$$\mathbf{C} = \{(i, j, k) \in \mathbf{A} \mid i + j + k > n\}. \tag{17}$$

Før vi tæller $\mathbf{B}$, bemærker vi, at betingelserne (14–16) er overflødige, da de følger af $i + j + k < n$. Vi definerer følgende funktion på $\mathbf{B}$:

$$(i, j, k) \longrightarrow (i+1, i+j+2, i+j+k+3).$$

Dette er en bijektiv korrespondance mellem mængden $\mathbf{B}$ og mængden

$$\mathbf{D} = \{(a, b, c) \mid 1 \leq a < b < c \leq n+2\}.$$

Men hvert tripel i $\mathbf{D}$ svarer til en delmængde på tre elementer blandt tallene $1, \dots, n+2$, så deres antal er den velkendte binomialkoefficient

$$\triangle(n) = \binom{n+2}{3}.$$

At tælle $\mathbf{C}$ er derimod ikke så let. Vi definerer funktionen på $\mathbf{C}$

$$(i, j, k) \longrightarrow (i+j+k-n, i+1, i+j+2). \tag{18}$$

Ifølge definitionen af $\mathbf{C}$, (17), gælder

$$0 < i + j + k - n$$

og af (16) fås

$$i + j + k - n < i + 1$$

mens $0 \leq j$ medfører

$$i + 1 < i + j + 2$$

og (14) giver os

$$i + j + 2 \leq n + 2$$

Endelig giver (15) os betingelsen

$$(i + j + k - n) + (i + 1) < (i + j + 2),$$

Derfor er funktionen (18) en bijektiv korrespondance mellem $\mathbf{C}$ og mængden

$$\mathbf{E} = \{(a, b, c) \mid 1 \leq a < b < c \leq n + 2 \\ \wedge a + b < c\}$$

For nu at tælle $\mathbf{E}$ går vi frem som følger: For hvert valg af $a + b = d$, $d = 3, 4, \dots, n + 1$, kan vi vælge a , $1 \leq a \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, og c , $d < c \leq n + 2$, mens b nødvendigvis bliver $b = d - a$. Derfor er antallet af tripler i $\mathbf{E}$

$$\nabla(n) = \sum_{d=3}^{n+1} (n + 2 - d) \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor.$$

En måde at komme videre på, vil være at betragte differensen

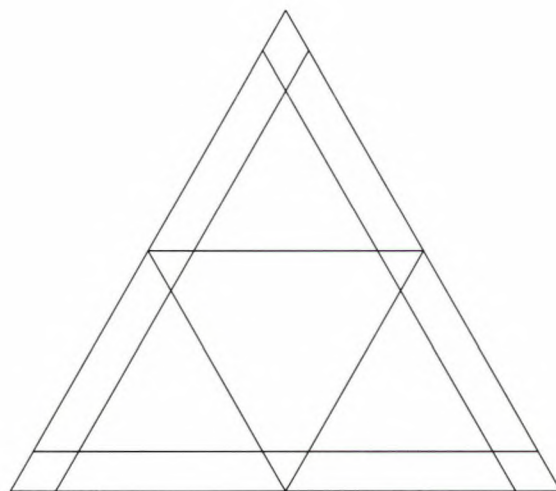
$$\begin{aligned} \nabla(n) - \nabla(n-1) &= \sum_{d=3}^{n+1} (n + 2 - d) \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor - \sum_{d=3}^n (n + 1 - d) \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \sum_{d=3}^n \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \sum_{d=3}^n \frac{d-1 - \delta(d-1)}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{\delta(n)}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Ved hjælp heraf får vi

$$\begin{aligned} \nabla(n) &= \sum_{\nu=1}^n \left\lfloor \frac{\nu^2}{4} \right\rfloor = \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu^2}{4} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta(\nu)}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1 - \delta(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} - \frac{\delta(n)}{8}, \end{aligned} \quad (19)$$

som er det samme som (13).

Differensligningen



Figur 5

Korthuset eller trekanten T_n af størrelse n indeholder præcis tre trekanten T_{n-1}^i $i = 1, 2, 3$ af størrelse $n - 1$. Fællesmængden af to trekanten, $T_{n-1}^i \cap T_{n-1}^j$ af størrelse $n - 1$ er en trekant, T_{n-2}^{ij} af størrelse $n - 2$, så de tre par danner tre sådanne trekanten. Heldigvis udgør fællesmængden af de tre – eller alle seks – én trekant af størrelse $n - 3$, T_{n-3} .

Først tæller vi de trekanten i T_n , som tillige ligger i mindst én af trekanten T_{n-1}^i . Nu var $f(n-1)$ antallet af trekanten i hver af trekanten af størrelse $n - 1$. Men $3f(n-1)$ tæller hver trekant, som tillige ligger i en af de tre trekanten, T_{n-2}^{ij} , med mindst to gange. Vi må derfor trække $f(n-2)$ fra tre gange. Men hver af de trekanten, der ligger i T_{n-3} , er blevet talt med 3 gange og trukket fra 3 gange, så de må lægges til til sidst. Derfor bliver antallet af trekanten, der tillige ligger i en mindre trekant, tallet

$$3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3)$$

For at få det samlede antal trekanten i T_n må vi tilføje dem, der ikke ligger i nogen af de mindre trekanten. Det drejer sig om selve trekanten, T_n , og, når n er lige, trekanten på spidsen af størrelse $\frac{n}{2}$. Differensligningen for funktionen $f(n)$ bliver derfor:

$$f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3) + 2 - \delta(n). \quad (20)$$

Denne formel findes i [13].

Ligningen kan løses på flere måder. J. W. Moon og N. J. Pullman bruger i [13] den elegante eksponentialfrembringerfunktion, som vi vender tilbage til, men man kan godt nøjes med den almindelige frembringerfunktion, som vi viser i næste paragraf. Endelig kan man jo løse ligningen ved simpelthen at spalte operatoren, som vi skal gøre nu.

Vi skriver ligningen (20) som

$$f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 2 - \delta(n). \quad (21)$$

Det karakteristiske polynomium for operatoren har den tredobbelte rod 1. Hvis vi derfor indfører den almindelige differensoperator

$$\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$$

kan vi skrive (21) som

$$\Delta^3 f(n) = 2 - \delta(n),$$

der fx løses successivt som

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(n) &= \alpha + \sum_{\nu=1}^n (2 - \delta(\nu)) = \alpha + \frac{3n - \delta(n)}{2}, \\ \Delta f(n) &= \beta + \sum_{\nu=1}^n \left(\alpha + \frac{3\nu - \delta(\nu)}{2} \right) \\ &= \beta + \alpha \cdot n + \frac{3n^2 + 2n - \delta(n)}{4}, \\ f(n) &= \sum_{\nu=1}^n \left(\beta + \alpha \cdot \nu + \frac{3\nu^2 + 2\nu - \delta(\nu)}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot \frac{n + \delta(n)}{2} + \beta \cdot n + \alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+2)(2n+1) - \delta(n)}{8} \\ &\quad + \beta \cdot n + \alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Idet konstanten i tredje trin er 0, fordi $f(0) = 0$. Af $f(1) = 1$ og $f(2) = 5$ fås $\alpha = \beta = 0$. Herefter ses det umiddelbart, at (22) er det samme som (8).

Frembringerfunktionen

Dette er blot en anden metode til løsning af (21). Vi definerer en formel potensrække, $F(x)$, med n -te koefficient lig med $f(n)$, hvor $f(n)$ antages at løse (21).

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n. \quad (23)$$

Vi ganger nu (23) med x successivt og får

$$xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)x^n$$

$$x^2 F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-2)x^n$$

$$x^3 F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-3)x^n.$$

med definitionerne $f(0) = f(-1) = f(-2) = 0$, som passer i (21) for $n = 1, 2, 3$. Ved brug af differensligningen (21) får vi derfor

$$\begin{aligned} &F(x)(1 - 3x + 3x^2 - x^3) \\ &= F(x) - 3xF(x) + 3x^2F(x) - x^3F(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) \\ &\quad - f(n-3))x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2 - \delta(n))x^n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(n)x^n \\ &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= \frac{2x}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{x + 2x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x + 2x^2}{(1-x)(1+x)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Ved at dividere med $1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1-x)^3$ får vi af (24) ved hjælp af en partialbrøksopspaltning

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2x + x^2}{(1-x)^3(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{(1-x)^4} - \frac{\frac{7}{4}}{(1-x)^3} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-x)^2} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{16}}{1-x} + \frac{\frac{1}{16}}{1+x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Hver af disse partialbrøker har en velkendt rækkeudvikling, der fås ved successiv differentiation af en kvotientrække:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \\ \frac{1}{(1-x)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n. \end{aligned} \quad (26)$$

Substitution af udtrykkene fra (27) i (25) giver ved sammenligning af koefficienterne i denne række og (23)

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \\ &\quad - \frac{7}{4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{8} \cdot (n+1) + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot (-1)^n \\ &= \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n - \delta(n)}{8}, \end{aligned}$$

der let genkendes som (8).

Den eksponentielle frembringerfunktion

I [13] løser J. W. Moon og N. J. Pullman (21) med den eksponentielle frembringerfunktion. Først forskyder vi $n \rightarrow n+3$ i (21) og får

$$\begin{aligned} f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) \\ = 1 + \delta(n). \end{aligned} \quad (27)$$

Dernæst definerer vi en formel potensrække, $F(x)$ med n -te koefficient lig med $\frac{f(n)}{n!}$, hvor $f(n)$ antages at løse (27);

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n. \quad (28)$$

Ved successiv differentiation af (28) får vi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{n!} x^n, \\ F''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+2)}{n!} x^n, \\ F'''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+3)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Denne gang giver differensligningen (27) anledning til en differentialligning, nemlig

$$\begin{aligned} F'''(x) - 3F''(x) + 3F'(x) - F(x) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\delta(n)}{n!} x^n \\ = e^x + \sinh(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned} \quad (29)$$

Den karakteristiske ligning har igen tredobbeltrøden 1, så løsningen findes som

$$F(x) = \frac{1}{4}x^3e^x + \alpha x^2e^x + \beta xe^x + \gamma e^x + \frac{1}{16}e^{-x}$$

hvor α , β og γ afhænger af begyndelsesværdierne. Vi indfører nu rækkeudviklingerne for e^x og e^{-x} i udtrykket og får

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}n(n-1)(n-2) + \alpha n(n-1) \right. \\ &\quad \left. + \beta n + \gamma + \frac{(-1)^n}{16} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

For at finde α , β og γ , sætter vi de kendte værdier ind for $f(n)$. Vi får ligningerne

$$\begin{aligned} n=0: \quad \gamma + \frac{1}{16} &= f(0) = 0; \\ n=1: \quad \beta + \gamma - \frac{1}{16} &= f(1) = 1; \\ n=2: \quad 2\alpha + 2\beta + \gamma + \frac{1}{16} &= f(2) = 5. \end{aligned}$$

Altså er

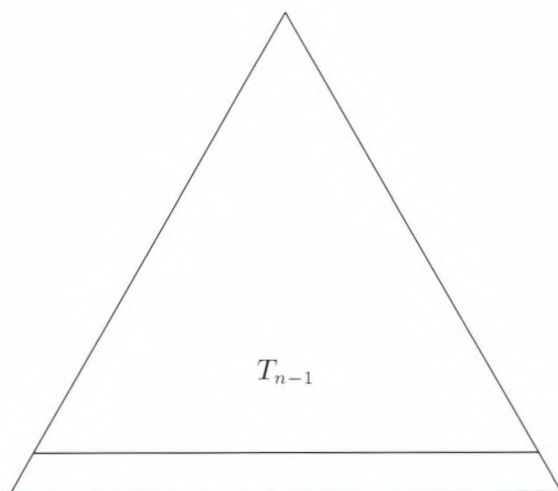
$$\gamma = -\frac{1}{16}, \quad \beta = \frac{9}{8}, \quad \alpha = \frac{11}{8};$$

så vi ender med at finde

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2n(n-1)(n-2) + 11n(n-1) + 9n}{8} \\ &\quad - \frac{1 - (-1)^n}{16} \\ &= \frac{n(2n^2 + 5n + 2)}{8} - \frac{\delta(n)}{8}, \end{aligned}$$

let at genkende som (8).

Induktion eller rekursion



Figur 6

I dette afsnit skal vi bruge en første ordens differensligning til at finde $f(n)$. Sammenlignet med (21) sker simplifikationen af venstre side på bekostning af højresiden:

$$f(n) - f(n-1) = F(n)$$

hvor $F(n)$ er en eller anden kompliceret funktion. Denne angrebsvinkel findes i [2].

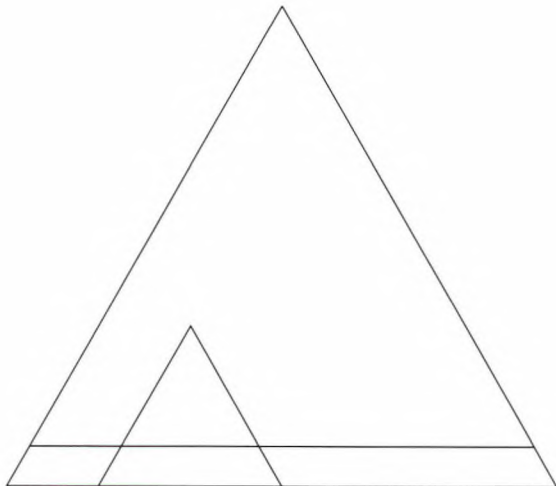
Denne gang ser vi kun på et korthus, T_{n-1} , der er stueetagen mindre end T_n , se figur 7, og vi forsøger at

beregne antallet af tilkomne, $F(n)$, som ligger i T_n , men ikke i T_{n-1} .

Det bliver lidt lettere at gøre dette, hvis vi deler op i retvendte trekanter og trekanter på spidsen:

$$\begin{aligned}\triangle(n) - \triangle(n-1) &= G(n), \\ \nabla(n) - \nabla(n-1) &= H(n),\end{aligned}$$

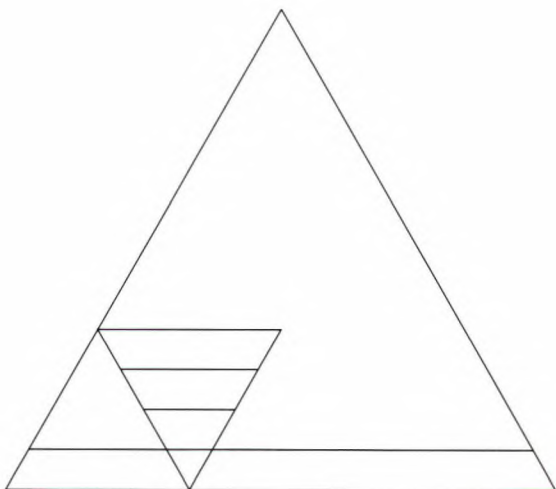
hvor vi søger G og H .



Figur 7

Der er én retvendt nyttilkommen i T_n for hver prik i T_{n-1} , se figur 7, hvad der giver et samlet antal på

$$G(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$



Figur 8

Heraf følger umiddelbart

$$\begin{aligned}\triangle(n) &= \sum_{\nu=1}^n G(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \binom{\nu+1}{2} = \binom{n+2}{3}.\end{aligned}\quad (30)$$

Funktionen $H(n)$ er som sædvanlig mere genstridig at beregne. Alle nyttilkomne må have spidsen på grundlinjen i T_n (figur 8). For hvert punkt, i , $i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, er der plads til i ny trekanter inden i T_n . Vi får derfor ved hjælp af figurens symmetri

$$H(n) = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i - (1 - \delta(n)) \frac{n}{2}$$

hvor vi omhyggeligt har undgået at tælle $i = \frac{n}{2}$ med to gange, når n er lige. Vi beregner nu

$$\begin{aligned}H(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) - (1 - \delta(n)) \frac{n}{2} \\ &= \frac{n - \delta(n)}{2} \left(\frac{n - \delta(n)}{2} + 1 \right) - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \delta(n) \\ &= \frac{n^2}{4} + \delta(n) \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{4} - \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{\delta(n)}{4}.\end{aligned}$$

Vi går nu frem som i (19) og får

$$\nabla(n) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} - \frac{\delta(n)}{8},$$

igen det samme som (13).

Den gode reference

Den sidste metode går ud på at spørge sig for. Da spørgsmålet, "How Many Triangles?" blev stillet i [4], kom der ca. 60 besvarelser med formlen, de fleste med henvisning til [8]. I [2, 15] blev problemet karakteriseret som "velkendt", i [15] med henvisningerne [6, 11, 12, 13]. Herefter kan vi måske ændre karakteristiken til "vel-løst".

Slutning

Dette er en historie om tælleteknikkernes succes. Hver eneste kendt metode har vist sin evne til fange alle trekanterne uden at overse én eneste.

Samtidig tyder løsningerne på, at problemet ikke er helt oplagt. Ligegyldigt hvilket synspunkt, man har anlagt, har der været en hård nød, der skulle knækkes.

Referencer:

- 1) J. E. Brider, A mathematical adventure, *Mathematics teaching*, 37 (1966), 17–21.
- 2) L. Carlitz and R. Scoville, A well-known problem, solution, *Mathematics Magazine*, 47 (1974), 290–291.
- 3) R. J. Cormier and R. B. Eggleton, Counting by correspondence, *Mathematics Magazine*, 49 (1976) 181–186.
- 4) R. E. Edwards, Problem 889, *Mathematics Magazine*, 47 (1974) 46–47.
- 5) R. H. Garstang, Triangles in a triangle, *Mathematical Gazette*, 70 (1986) 288–289.
- 6) F. Gerrish, How many triangles?, *Mathematical Gazette*, 54 (1970) 241–246.
- 7) J. Halsall, An interesting series, *Mathematical Gazette*, 46 (1962) 55–56.
- 8) C. L. Hamberg and T. M. Green, An application of triangular numbers, *Mathematics Teacher*, 60 (1967) 339–342.
- 9) Mogens Esrom Larsen, The Eternal Triangle - A History of a Counting Problem, *Coll. J. Math.*, 20 (1989) 370–384.
- 10) Sam Loyd, *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks & Conundrums*, Pinnacle Books, New York, 1976 (1. ed. 1914). p.284.
- 11) B. W. Martin, How many triangles?, *Mathematical Gazette*, 55 (1971) 440–441.
- 12) B. D. Mastrantone, How many triangles?, *Mathematical Gazette*, 55 (1971) 438–440.
- 13) J. W. Moon and N. J. Pullman, The number of triangles in a triangular lattice, *Delta*, 3 (1973) 28–31.
- 14) A. Cyril Pearson, *The Twentieth Century Standard Puzzle Book Part II*, Routledge, London, 1907, 74–75.
- 15) B. Prielipp and N. J. Kuenzi, A well-known problem, comment, *Mathematics Magazine*, 47 (1974) 290.
- 16) N. J. A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, New York, 1973, Sequence #1569.
- 17) Celia Wells, Numbers of triangles, *Mathematics Teaching*, 54 (1971) 27–29.



Mogens Esrom Larsen er redaktør af matematikken i KVANT. Han er ansat som lektor ved Københavns universitet.

Vejledning for forfattere

Redaktionen af KVANT modtager meget gerne artikler fra læserne. Indholdet af artiklerne bør være forståelig for personer med interesse for fysik – således at en god gymnasieelev vil få noget ud af at læse artiklen. Illustrationer til artiklerne er meget velkomne.

Det er håbet, at der vil komme en række rubrikker – der er allerede en debatside, som er åben for indlæg om alt hvad der rører sig om fysik. Bladet vil også bringe meddelelser fra Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse, ligesom omtale af arrangementer, der kan have interesse for fysikinteresserede vil blive bragt. Da der kun kommer fire numre om året skal der gives meddelelse om et givet arrangement i god tid, hvis det skal kunne komme med i bladet. Redaktionen vil også stræbe efter at kunne bringe korte notitser med friske nyheder og anmeldelser af bøger af interesse for fysikere.

Vejledning i udformning af artikler til KVANT

For at lette produktionen modtages artikler helst på elektronisk facon. Det kan enten være som elektronisk post til e-mail adressen

`kvant@nbivax.nbi.dk`

eller (hellere) på en DOS-formatteret diskette, der sendes til

KVANT
c/o Mads Hammerich
Gersonsvej 40
2900 Hellerup

eller afleveres til et redaktionsmedlem sammen med

eventuelle figurer, og – *meget vigtigt* – et billede og en præsentation af forfatteren, i stil med de præsentationer, der findes i slutningen af hver artikel i dette nummer.

Teksten kan være skrevet i L^AT_EX, som ren ASCII fil, i WordPerfect eller Word. De første formater foretrækkes.

Formler og specielle symboler kan indsættes i teksten med L^AT_EX eller T_EX. De modtages dog under alle omstændigheder også gerne på papir.

Illustrationer og billeder til artiklerne afleveres separat – det er (endnu) en kvalitetsmæssig fordel at indsætte disse i artiklen på sædvanlig facon. Undlad venligst at afsætte plads til dem i teksten, men placer figurforklaringen til sidst eller for sig selv.

Tabeller og opstillinger ønskes som simple opstillinger med tabulatorer. Brug ikke for megen energi på at lave “snedige” opstillinger med linier og lignende, men vis gerne på papir hvordan du selv ville foretrække det.

- Forfatternavne skrives med kursiv.
- Afsnitoverskrifter skrives med fed skrift.
- Der er ingen tomme linier mellem afsnit, men de indledes med en indrykning (tabulering).
- Referencer anføres i teksten med et løftet ciffer, og anføres til sidst i artiklen med nummer, forfatter, artikel (eventuelt bind-nummer med fed skrift), sidetal og årstal i parentes.
- Husk et billede og en kort præsentation af forfatteren.

Abonnement på KVANT

koster 135 kr for en årgang og vil blive opkrævet pr. giro. Nye abonnenter vil modtage eventuelle tidligere numre af den løbende årgang. Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse vil modtage bladet som et medlemsblad.

Hvis du mener at du har abonnement, men ikke får bladet – har du nok glemt at melde flytning af bladet hos dit lokale postkontor, eller måske har du ikke betalt. Bemærk at flytning af KVANT skal meddeles postvæsenet eksplicit!

Abonnement tegnes ved at skrive til

Lene Körner, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø, e-mail: koerner@math.ku.dk